

ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XX.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT -- SZERKESZTI
VAJON IMRE, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO PHYSICAE

TANULMÁNYOK A
F I Z I K A I
TUDOMÁNYOK
KÖRÉBŐL

REDIGIT -- SZERKESZTI
FRANCZIA TAMÁS

EGER
1990

HU ISSN 2039-1422

Felelős kiadó: Orbán Sándor
főiskolai főigazgató

Készült: az Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola házi nyomdájában

TAMÁS FRAN CZIA

AN ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING MULTICENTRE INTEGRALS BUILT UP FROM GTF-S II.

ABSTRACT: This paper is the continuation of [1] discussing the analytical evaluation of three-centre one-electron potential integrals made up of primitive GTF-S and Bardsley's pseudopotential.

In [1], [2], [3], [4] and [5] we have suggested an analytical method for the unified evaluation of multicentre potential integrals made up of primitive GTF-S and polarizational pseudopotential members. The main steps of the method have been presented mainly in [1], [4], [5]. This paper is the continuation of [1] discussing the analytical evaluation of three-centre one-electron potential integrals made up of primitive GTF-S and Bardsley's pseudopotential.

In [1] we have pointed out that the value of $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \left[(p - \Gamma x)^2 + d^2 \right]^{-2*} dx$ is necessary to the analytical evaluation of the matrix elements of Bardsley's pseudopotential formed with primitive GTF-S. Here p, Γ, d are real numbers.

In calculating the above-mentioned integral first we are going to apply Fourier's cosinus- and sinus transforms defined by the

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \quad (39a)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos(kx) dk \quad (39b) \quad \text{and}$$

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad (40a)$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) [(p - \Gamma x)^2 + d^2]^{-2} dx \equiv \int_a^b \frac{e^{-x^2}}{[(p - \Gamma x)^2 + d^2]^a} dx$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \sin(kx) dk \quad (40b) \text{ equations}$$

The integrability and the continuity of $f(x)$ and $F(k)$ from 0 to $+\infty$ are the necessary conditions of the existence of the (39a), (39b), (40a), (40b) equations. Moreover (39a), (39b) demand the $f(x)=f(-x)$ equality whereas (40a), (40b) demand the $f(x)=-f(-x)$ one.

If we want to calculate an integral of $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,p) dx$ form by means of Fourier's cosinus- and sinus transforms with respect to p it is useful to express $f(x,p)$ as a sum of a gerade and an ungerade function of p :

$$f(x,p) = f_{g(p)}(x,p) + f_{ug(p)}(x,p) \quad (41)$$

$$f_{g(p)}(x,p) = [f(x,p) + f(x,-p)] 2^{-1}, f_{ug(p)}(x,p) = [f(x,p) - f(x,-p)] 2^{-1} \quad (42a-b)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p,x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x,p) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{ug(p)}(x,p) dx \quad (43)$$

First let us deal with the calculation of the first member in the right-side of (43). As $f_{g(p)}(x,p)$ is a gerade function of p , $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x,p) dx$ is also a gerade function of p , because if $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x,p) dx$, then $F(-p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x,-p) dx$ moreover in case of $f(x,p) = f(x,-p)$ for each x and p $F(p) = F(-p)$. Let $\Phi(k)$ be equal to

$$\text{int}(0 \leq p \leq \infty) \left[\text{int}(-\infty \leq x \leq +\infty) f_{g(p)}(x, p) \right] \quad (44a)$$

$$\text{then } \text{int}(-\infty \leq x \leq +\infty) f_{g(p)}(x, p) = \frac{2}{\pi} \text{int}(0 \leq k \leq \infty) \Phi(k) \cos(pk) \quad (44b)$$

If calculating $\Phi(k)$ and that of its inverse are simpler than the direct evaluation of $\text{int}(-\infty \leq x \leq +\infty) f_{g(p)}(x, p)$ it is useful to apply to the calculation of $\text{int}(-\infty \leq x \leq +\infty) f_{g(p)}(x, p)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) dx \right] \cos(kp) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) \cos(kp) dp \right] dx = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) \cos(kp) dp \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) e^{ikp} dp \right] dx \quad (45) \end{aligned}$$

It is to be seen that the first task is to evaluate

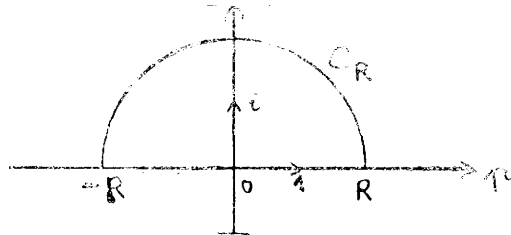
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) e^{ikp} dp$. Taking into account the (41), (42a), (42b), (43), (44a), (44b), (45), (46) equations, the remark concerning the first task in calculating the right side of (45) moreover taking into account also the continuity and the integrability of $\text{int}(-\infty \leq x \leq +\infty) f_{g(p)}(x, p)$ with respect to p from 0 to $+\infty$ and the continuity and integrability of $\Phi(k)$ with respect to k from 0 to $+\infty$ we can see that we have to evaluate the

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f_{g(p)}(x, p) e^{ikp} dp = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \cdot \exp(ikp) \cdot \right. \\ & \cdot \left[(p - \Gamma x)^2 + d^2 \right]^{-2} dp + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \cdot \exp(ikp) \cdot \\ & \cdot \left[(p + \Gamma x)^2 + d^2 \right]^{-2} dp \Big] \text{ expression,} \quad (47) \end{aligned}$$

For the sake of calculating the first member in the right side of (47) let us consider the

$$\oint_{\sigma_R} \exp(ikz) \left[(z - \Gamma x)^2 + d^2 \right]^{-2} dz$$

integral where $k > 0$ because it is the parameter of Fourier's cosinus transform with respect to p and G_R is the curve to be seen below:



$$G_R = [-R, R] \cup C_R$$

$$z = \rho + i\tau$$

$$\oint_{G_R} \frac{e^{-x^2} e^{ikz}}{[(z - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-x^2} e^{ikp}}{[(p - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dp + \int_{C_R} \frac{e^{-x^2} e^{ikz}}{[(z - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dz \quad (48)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{G_R} \frac{e^{-x^2} e^{ikz}}{[(z - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} e^{ikp}}{[(p - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dp \quad (49)$$

that results from

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-x^2} e^{ikp}}{[(p - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dp \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} e^{ikp}}{[(p - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dp \quad (50a) \text{ and}$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{-x^2} e^{ikz}}{[(z - \Gamma x)^2 + d^2]^2} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} \left| \frac{e^{-x^2} e^{ikz}}{[(z - \Gamma x)^2 + d^2]^2} \right| \cdot \pi R \quad (50b)$$

(50b) is the application of the

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} \{ |f(z)| \} \cdot l(\gamma) \quad (51)$$

relation that is Cauchy's estimation where $l(\gamma)$ is the length of the curve γ . The denominator of the fraction in the right side of (50b) is equal to zero if $z = \Gamma x + id$ and accordingly in case of

$R = \sqrt{(\Gamma x)^2 + d^2}$ and $\varphi = \arctg [d \cdot (\Gamma x)^{-1}]$. Since $|\exp(ikR \cos \varphi)| = 1$ in any case, $|\exp(-kR \sin \varphi)| \leq 1$ along C_R if $k \geq 0$ and the numerator

of the fraction is a linear function of R while the denominator is a polynomial of R of degree 4 not being equal to zero along C_R if $R > \sqrt{(\Gamma x)^2 + d^2}$ the values of the denominator converge to $+\infty$ more quickly than that of the numerator if $R \rightarrow \infty$. That is why the values of the fraction converge to zero if $R \rightarrow \infty$. Thus the integral in the left side of (50b) has to converge to zero if $R \rightarrow \infty$.

IRODALOM

- [1] Franczia, T.: An Analytical Method For Calculating Multicenter Integrals Built Up From STF-S and GTF-S.
WATOC 87, WORLD CONGRESS ON THEORETICAL ORGANIC CHEMISTRY
The Book of Abstracts PA 48.
- [2] Franczia, T.: On the Analytical Evaluation of Multicentre Potential Integrals Built Up of GTO-S and Bardsley's Pseudopotential Containing Members of $\alpha_d \left[(\delta - \Gamma x)^2 + d^2 \right]^{-n}$ Form
Twelfth Austin Symposium on Molecular Structure
Austin, Texas, USA February 28 - March 3, 1988
The Book of Abstracts
- [3] Franczia, T.: An analytical Method For Calculating Multicentre Integrals Built Up From GTF-S I.
Acte Academiae Paedagogicae Agriensis 1987.
- [4] Franczia, T.: The Unified Evaluation of Three-Centre One-Electron Potential Integrals Made Up of Primitive GTO-S And Polarizational Pseudopotential Members I.
The Case of Bardsley's Potential
Thirteenth Austin Symposium on Molecular Structure
Austin, Texas, USA March 12-14, 1990
(Accepted for presentation)

- [5] Franczia, T.: The Unified Evaluation of Three-Centre One-Electron Potential Integrals Made Up of Primitive GTO-S And Polarizational Pseudopotential Members II. The Case of Preuss's Potential, Thirteenth Austin Symposium on Molecular Structure, Austin, Texas, USA March 12-14, 1990 (Accepted for presentation)
- [6] Duncan, J.: Complex Analysis, John Wiley and Sons.

ANATOL NOWICKI

COMPOSITE SPACETIME FROM TWISTORS AND ITS EXTENSIONS

ABSTRACT: *The main ideas of the twistor and supertwistor descriptions of spacetime and superspace in $D=4$ and $D=6$ dimensions are considered briefly from a didactical point of view. We underline also the role of complex twistor formalism for $D=4$ and the quaternionic twistor description for $D=6$ dimensions.*

1. Introduction.

The theory of twistors has been formulated by Roger Penrose [1] in order to unify the quantum mechanical and the spacetime descriptions of Nature. It is well known that quantum mechanics deals with mathematical methods based on the complex structure of a Hilbert space of physical states (the probability amplitudes are the complex numbers). On the other hand, the theory of relativity demands the spacetime points to be described by real fourvectors (the coordinates of the spacetime events are the real numbers). The difficulties in a consistent formulation of a relativistic quantum theory are immediately related to this fact.

The main idea of the twistor theory is to treat the real coordinates of spacetime points as composed quantities of the complex objects so called twistors. Therefore, in the twistor theory the most fundamental objects are the twistors instead of the real spacetime points.

Mathematically twistors are the conformal $O(4,2)$ spinors

i.e. the complex fourvector in the fundamental representation of a covering conformal group $SU(2,2) \approx \overline{U(4,2)}$. A correspondence between the twistors and the spacetime points is given by the incidence equation - Penrose relation.

The twistor formalism formulated originally by Penrose for the four - dimensional ($D=4$) spacetime can be extended in two ways:

- i) extending the Penrose-relation in a supersymmetric way one obtains a correspondence between the supertwistors and the points of $D=4$ superspaces [2,3],
- ii) replacing the complex numbers by quaternions in the Penrose relation one can bring the quaternionic twistors into connection with the points of the $D=6$ spacetime [4]. Furtheron, one can extend this quaternionic twistor formalism supersymmetrically introducing quaternionic fermionic degrees of freedom.

2. Composite $D=4$ spacetime from twistors.

Let us consider the fundamental steps in a more didactical way leading to the formulation of the Penrose-relation.

It is well known that any spacetime point described by the fourvector $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$ can be brought into connection with a hermitean 2×2 dimensional matrix, using the Pauli matrices σ_μ :

$$x \longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} = x^\mu \sigma_\mu \quad (1)$$

this correspondence is one to one.

One can also consider the complex fourvector $z=(z^0, z^1, z^2, z^3)$ instead of the real one x . The complex fourvector z describes a point of the complexified Minkowski Space \mathbb{CM}^4 . A similar relation to (1) gives us the correspondence between the points of \mathbb{CM}^4 and two dimensional complex matrices:

$$z \longleftrightarrow Z = z^\mu \sigma_\mu \quad (2)$$

One can get to the real Minkowski space \mathbb{RM}^4 by putting the reality condition onto the complex matrix Z i.e.

$$z \longrightarrow \text{if } Z = Z^+ \quad (3)$$

where Z^+ denotes a hermitean conjugated matrix.

A point in the twistor construction is the use of isomorphism between complex two dimensional matrices Z and Z -plane in a fourdimensional complex vector space \mathbb{C}^4 - the twistor space $\mathbb{T} = \mathbb{C}^4$. This isomorphism is given by the following correspondence [5]:

$$Z \longrightarrow \left\{ \text{subspace spanned by columns of } 4 \times 2 \text{ matrix } \begin{bmatrix} iZ \\ I_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (4)$$

or more explicitly, the 4×2 matrix columns are identified with two twistors $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$:

$$\begin{bmatrix} i \\ I_2 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} iz^0 + iz^3 & z^2 + iz^1 \\ iz^1 - z^2 & iz^0 - iz^3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (T_1, T_2) \quad (4a)$$

From a mathematical point of view the correspondence (4) gives an affine system of coordinates for the Z -plane in the twistor space \mathbb{T} . This subspace is a complex Grassmann manifold $G_{2,4}(\mathbb{C})$. In other words, the Z -plane is given by the two linearly independent twistors $T_1, T_2 \in \mathbb{T}$.

Therefore, the relation (4) gives us the correspondence between the complexified spacetime point $z \in \mathbb{CM}^4$ and a complex Z -plane in the twistor space \mathbb{T} .

On the other hand, there is not a unique relation between the pair of twistors (T_1, T_2) and the Z -plane generated by this pair. It is

clear, that every pair of twistors (T'_1, T'_2) is related to a nonsingular 2×2 matrix as follows.

$$(T'_1, T'_2) = (T_1, T_2) M \quad (5)$$

gives the same Z -plane in the twistor space \mathbb{T} .

Let the pair (T_1', T_2') has the form (4a), therefore any equivalent pair of twistors satisfy

$$\begin{bmatrix} i & \dot{Z} \\ I_2 \end{bmatrix} = (T_1', T_2')M = \begin{bmatrix} \Omega & M \\ \Pi & M \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} iZ = \Omega M \\ I_2 = \Pi M \end{matrix} \quad (6a)$$

where the 2×2 complex matrices Ω, Π are constructed of the coordinates of the twistors T_1, T_2 .

Therefore, we obtain

$$iZ = \Omega \Pi^{-1} \Leftrightarrow \Omega = iZ \Pi \quad (6b)$$

This is a Penrose relation in matrix form.

Let us denote

$$(T_1, T_2) = \begin{bmatrix} \omega^{11} & \omega^{12} \\ \omega^{21} & \omega^{22} \\ \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega \\ \Pi \end{bmatrix} \quad (7a)$$

now, from (6b) we obtain

$$\begin{aligned} \omega^{\dot{\alpha}1} &= iZ^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta 1} \\ \omega^{\dot{\alpha}2} &= iZ^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta 2} \end{aligned} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (7b)$$

or more simply

$$\omega^{\dot{\alpha}} = iZ^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta} \quad T = \begin{bmatrix} \omega^{\dot{\alpha}} \\ \pi_{\beta} \end{bmatrix} \quad (7c)$$

it is the incidence equation postulated first by Penrose.

Its physical meaning is the following [1]:

the point $z \in \mathbb{CM}^4$ corresponds to the twistor $T \Leftrightarrow \omega^{\dot{\alpha}} = iZ^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta}$. It is obvious that all twistors lying on the Z -plane given in the (4) relations correspond to a given $z \in \mathbb{CM}^4$ point and for a given twistor T satisfying (7c) only one complex spacetime point z is assigned.

If one needs to describe the real space-time point $x \in \mathbb{RM}^4$, one should require the matrix Z to be hermitean i.e.

$$Z = Z^+ \Rightarrow Z = -i\Omega \Pi^{-1} = i(\Pi^{-1})^+ \Omega^+ \quad (8a)$$

therefore we get the following reality condition:

$$\Pi^+ \Omega + \Omega^+ \Pi = 0 \quad (8b)$$

or using the notation (7a) we have three relations:

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha 1}^* \dot{\omega}^{\alpha 1} + \dot{\omega}^{*\alpha 1} \pi_{\alpha 1} &= 0 \\ \pi_{\alpha 2}^* \dot{\omega}^{\alpha 2} + \dot{\omega}^{*\alpha 1} \pi_{\alpha 2} &= 0 \\ \pi_{\alpha 1}^* \dot{\omega}^{\alpha 2} + \dot{\omega}^{*\alpha 2} \pi_{\alpha 1} &= 0 \end{aligned} \quad (8c)$$

where $\pi_{\alpha\beta}^* = (\pi_{\alpha\beta})^*$, $\dot{\omega}^{*\alpha\beta} = (\dot{\omega}^{\alpha\beta})^*$ and $*$ denotes the complex conjugation.

In the twistor framework the equations (8c) say that the twistors T_1, T_2 are "null-twistors" with respect to the $U(2,2)$ norm:

$$(T_1, T_2) = (T_1, T_1) = (T_2, T_2) = 0 \quad (9)$$

where

$$(T, T) = T^+ G T = \begin{pmatrix} \dot{\omega}^{*\alpha} & \Pi^* \\ & \beta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}^\alpha \\ \Pi_\beta \end{pmatrix}$$

and

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Therefore, the reality condition is equivalent to the zero condition for twistors i.e. to vanishing the $U(2,2)$ norm of twistors T . The Z -planes generated by the "null twistors" are called totally null planes.

In this way we obtain the following correspondence diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{complex planes in } \mathbb{U} & \longleftrightarrow & \text{points of } \mathbb{CM}^4 \text{ (complex Minkowski space)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{totally null planes in } \mathbb{U} & \longleftrightarrow & \text{points of } \mathbb{RM}^4 \text{ (real Minkowski space)} \end{array}$$

We would like to stress here, that from the point of view of the twistor theory, regarding the relation (7c), it is more natural to use twistors for the description of the complex

Minkowski Space or the null twistors for that of the real Minkowski space time.

3. Supersymmetric extension of the Penrose incidence equation.

The aim of supersymmetry is to give a unified mathematical description of bosonic and fermionic fields. Therefore, one can consider bosons and fermions using the same theoretical scheme. Supersymmetry allows us to transform the descriptions of bosonic fields into fermionic ones and vice versa. (For more interested reader in this subject we recommend the references [6]). Therefore, in order to have a possibility of the description of bosonic and fermionic fields by using the twistor theory one has to extend it supersymmetrically.

The supersymmetry replaces the notation of a space-time point $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$ by an appropriate $\chi=(x^0, x^1, x^2, x^3; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ point of the superspace adding N Grassmann variables $\theta_1, \dots, \theta_N$. These additional degrees of freedom anticommute themselves.

Now, we can define a supervector representing $D=4$ N -extended superspace as follows

$$\chi = (x^0, x^1, x^2, x^3; \theta_1, \dots, \theta_N) = (x^\mu; \theta_A) \quad (11a)$$

where

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \dots, 4; & A &= 1, \dots, N \\ [x^\mu, x^\nu] &= x^\mu x^\nu - x^\nu x^\mu = 0 \\ \{\theta_A, \theta_B\} &= \theta_A \theta_B + \theta_B \theta_A = 0 \\ [x^\mu, \theta_A] &= x^\mu \theta_A - \theta_A x^\mu = 0 \end{aligned} \quad (11b)$$

The commuting coordinates of a supervector are called bosonic ones whereas its anticommuting coordinates are called anticommuting ones.

In the same spirit one can generalize the twistor approach introducing N -extended supertwistors $T^{(n)} = (\omega^\alpha, \pi_\beta; \xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{C}^{4;N}$ (bosonic supertwistors) and the fermionic N -extended supertwistors

$\tilde{T}^{(N)} = (\eta_1, \dots, \eta_A; u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{C}^{N;4}$, where the η_i quantities are fermionic coordinates and the u_A quantities are the bosonic ones [3].

Let us discuss the case of $N=1$ i.e. that of the simple supersymmetry briefly.

(i) Two linearly independent supertwistors $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}$ span $(2;0)$ - superplane in the superspace $\mathbb{C}^{4;1}$, in analogy to eqs.(6a,b) we get

$$(T_1^{(1)}, T_2^{(1)}) = \begin{bmatrix} \omega^{11} & \omega^{12} \\ \omega^{21} & \omega^{22} \\ \xi^1 & \xi^2 \\ \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iZ & \\ \theta^1 & \theta^2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Pi \quad (12)$$

where Z and Π are complex matrices of 2×2 type made up of bosonic elements. This can be expressed (cf. eqs.(7)) as follows

$$\begin{aligned} \omega^{\dot{\alpha}i} &= iz^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta i} \\ \omega^{\dot{\alpha}2} &= iz^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta 2} \\ \xi^1 &= \theta^1 \pi_{11} + \theta^2 \pi_{21} \\ \xi^2 &= \theta^1 \pi_{12} + \theta^2 \pi_{22} \end{aligned} \quad (12a)$$

Therefore we obtain the supersymmetric extension of the Penrose relation (7c) in the form

$$\begin{aligned} \omega^{\dot{\alpha}} &= iz^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta} \\ \xi &= \theta^{\alpha} \pi_{\alpha} \end{aligned} \quad (12b)$$

It means that each $T^{(1)} = (\omega^{\dot{\alpha}}, \pi_{\beta}, \xi)$ supertwistor corresponds to a (z, θ^{α}) superspace point.

However, it is not the only one possibility of the supersymmetrical generalization of the Penrose relation (7c).

ii) Applying three linearly independent supertwistors $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \hat{T}^{(1)}$ (two bosonic and one fermionic space $\mathbb{C}^{4;1}$).

In analogy to (12) we have

$$(T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \tilde{T}^{(1)}) = \begin{bmatrix} \omega^{11} & \omega^{12} & \rho^1 \\ \omega^{21} & \omega^{22} & \rho^2 \\ \pi_{11} & \pi_{12} & \eta_1 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \eta_2 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iz^{11} & iz^{12} & \theta^1 \\ iz^{21} & iz^{22} & \theta^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \eta_1 \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \eta_2 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & u \end{bmatrix} \quad (13)$$

where the fermionic supertwistor includes the four fermionic $(\rho^1, \rho^2, \eta_1, \eta_2)$ components and also one bosonic u .

The $(2;1)$ - superplane is parametrized by a (Z, θ) matrix of 2×3 type with elements satisfying the following incidence relations:

$$\omega^{\dot{\alpha}} = iz^{\dot{\alpha}\beta} \pi_{\beta} + \theta^{\dot{\alpha}} \zeta \quad (\text{bosonic incidence equation}) \quad (14a)$$

$$\rho^{\dot{\alpha}} = iz^{\dot{\alpha}\beta} \eta_{\beta} + \theta^{\dot{\alpha}} u \quad (\text{fermionic incidence equation}) \quad (14b)$$

These equations give us a different generalization of the Penrose relation from (12b).

Therefore, for $N=1$ supersymmetry there are two possible extensions of Penrose's relation. In case of the N -extended supersymmetry one can generalize the equation (7c) in $N+1$ different ways. The case of arbitrary N is considered in ref. [13].

4. Quaternionic extension of Penrose's incidence equation for $D=6$ spacetime.

There are two possible approaches to $D=6$ twistor formalism:

- (i) by extending Penrose's relation from $D=4$ to $D=6$ as it has been done by Hungston and Shaw in ref. [4].
- (ii) by replacement of the complex 2×2 matrix Z . In this approach the quaternionic 2×2 matrix $Z=Z^{\dagger}=\mathbb{X}$ describes sixdimensional ($D=6$) real Minkowski spacetime point. One can show that these two approaches are equivalent for the

description of the real sixdimensional spacetime \mathbb{RM}^6 .

First let us discuss first the case (i)

One can consider the complex $D=6$ twistors: $T=(\omega^a, \pi_a) \in \mathbb{C}^8$ ($a=1, \dots, 4$) as the norm of the spinors for eight dimensional complex orthogonal group $O(8, \mathbb{C})$ is:

$$(T, T') = \omega^a \pi'_a + \pi_a \omega'^a = 0 \quad (15)$$

the points of the complex $D=6$ Minkowski space \mathbb{CM}^6 are represented by a complex 4×4 antisymmetric matrix $z^{ab} = -z^{ba}$. The Penrose-incidence equation takes the form

$$\omega^a = z^{ab} \pi_b \quad a, b = 1, \dots, 4 \quad (16)$$

This equation has a nontrivial solution if the twistors T are pure (simple) i.e.

$$(T, T) = 2\omega^a \pi_a \quad (17)$$

in other words they have vanishing $O(8; \mathbb{C})$ norm.

The points of the real six dimensional Minkowski space \mathbb{RM}^6 are represented by a 4×4 complex, antisymmetric matrix Z satisfying the reality condition in the form

$$Z = -Z^* \quad \text{where} \quad Z^* = B^{-1} Z^+ B, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

and Z^+ denotes the hermitean conjugated matrix. This reality condition for matrix Z is equivalent to the following condition for twistors

$$\omega^{*a} \pi_a + \pi_a^* \omega^a = 0 \quad \text{where} \quad \omega^{*a} = \omega^{*b} (B^{-1})^a_b \quad (19)$$

$$\pi_a^* = \pi_b^* (B)^b_a$$

and $*$ means the complex conjugation.

The equation (19) is in fact the condition of vanishing the $V(4, 4)$ norm. Therefore, $D=6$ twistors describe the points of the real Minkowski space \mathbb{RM}^6 if the following two norms are zero:

$$O(8; \mathbb{C}) - \text{norm:} \quad \omega^a \pi_a = 0 \quad (20a)$$

$$U(4, 4) - \text{norm:} \quad \omega^{*a} \pi_a + \pi_a^* \omega^a = 0 \quad (20b)$$

It means that $D=6$ twistors describing the points of \mathbb{RM}^6 are

invariant under quaternionic orthogonal group $O(4; \mathbb{H})$ covering the conformal six dimensional group $O(6, 2)$:

$$O(4; \mathbb{H}) \equiv U_{\alpha}(4; \mathbb{H}) = O(8; \mathbb{C}) \cap U(4, 4) = \overline{O(6, 2)} \quad (21)$$

for details see ref: [7].

Therefore one can look for the quaternionic extension of $D=4$ twistor formalism which can describe $\mathbb{R}M^6$ Minkowski space.

Now, let us consider the case (ii).

First, we recall some basic properties of the quaternions \mathbb{H} , and recommend the references [8] on this subject.

The quaternions \mathbb{H} constitute a four-dimensional real associative algebra with identity $1 \equiv e_0$. Any quaternion q is given by the sum:

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad q_{\mu} \in \mathbb{R}, \quad \mu=0,1,2,3 \quad (22)$$

where the quaternionic units satisfy the following multiplication rule:

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (23)$$

Let us notice that the real numbers \mathbb{R} are naturally embedded in \mathbb{H} by identifying $q_0 e_0 = q_0 \in \mathbb{R}$.

For quaternions one can define a quaternionic conjugation (so called principal involution) writting

$$\bar{q} = q_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3 \quad (24a)$$

and the norm

$$|q|^2 = q \bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (24b)$$

Therefore, the algebra \mathbb{H} has the natural structure of the four-dimensional Euclidean space.

Sometimes it is useful to identify a quaternion q with the ordered pair of complex numbers (z_1, z_2) by

$$q = z_1 + e_2 z_2 = (q_0 + q_3 e_3) + e_2 (q_2 + q_1 e_3) \quad (25)$$

We can see that quaternions are the natural extensions of the real numbers \mathbb{R} as well as complex ones \mathbb{C} .

Now, in analogy tp (4) for the given 2×2 quaternionic matrix Z we can associate Z -plane in fourdimensional quaternionic space \mathbb{H}^4 -

quaternionic twistor space as follows

$$Z \longrightarrow \left\{ \text{subspace space by columns of } 4 \times 2 \text{ quaternionic} \right. \\ \left. \text{matrix } \begin{bmatrix} e_2 & Z \\ I_2 & \end{bmatrix} \right\} \quad (26)$$

By a similar procedure to eqs.(4,5,6) we get the quaternionic Penrose-relation

$$\omega^\alpha = e_2 Z^{\alpha/\beta} \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (27)$$

where the quaternionic twistor has the form $t = (\omega^\alpha, \beta)$.

A real D=6 Minkowski spacetime point is described by a sixdimensional vector $x = (x_0, x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{RM}^6$ which can be mapped on a quaternionic Hermitean 2×2 matrix (cf.eq(1)):

$$x \longrightarrow X = \begin{bmatrix} x_0 + x_5 & x_4 + x_k e_k \\ x_4 - x_k e_k & x_0 - x_5 \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, 3 \quad (28)$$

The reality condition $Z = Z^+$ (Z^+ denotes a quaternionic conjugated and transposed matrix) is equivalent to the following condition for quaternionic twistor t

$$\langle t, t \rangle = \bar{\omega}^\alpha e_2 \alpha + \bar{\alpha} e_2 \omega^\alpha = 0 \quad (29)$$

therefore, twistors t describe a point of \mathbb{RM}^6 if their $O(4; \mathbb{H}) \equiv U_\alpha(4; \mathbb{H})$ norms vanish.

Using the decomposition (25) of quaternionic coordinates of twistor \mathbb{H} one can immediately show that eq. (24) is equivalent to the relations (20), so the descriptions of \mathbb{RM}^6 by the D=6 complex twistors and D=6 quaternionic twistors are equivalent.

5. Final remarks.

It is worthwhile to notice that the two approaches above for the twistor description of D=6 spacetime are equivalent only for real space-time. This spacetime can be extended in two nonequivalent ways: by complexification or quaternionization

procedures.

One can show also that the quaternionic formulation of twistor theory leads to serious difficulties with quantization of twistors because of the noncommutativity of quaternions. However, the description of the $D=6$ spacetime in the quaternionic framework allows us to use the same geometry as in case of the complex description of $D=4$ spacetime.

Acknowledgements

The author would like to thank Professor Patkó György and the Department of Physics of Higher Pedagogical School in Eger for hospitality during his short stay in Eger.

References:

- [1] Penrose, R.: Rep. on Math. Phys., 12 (1977), 65 and references here in.
Penrose, R. - Rindler, W.: Spinors and Space-Time, vol. 1,2; Cambridge University Press 1984, 1986.
- [2] Ferber, A.: Nucl. Phys., B 132 (1976), 55.
- [3] Lukierski, J. - Nowicki, A.: Phys. Lett., 211B (1988), 276.
- [4] Hughston, L.P. - Shaw, W.T.: Class. Quantum Grav. 4 (1987), 869.
Bengtsson, I. - Cederwall, M.: Nucl. Phys., B302 (1988), 81.
Lukierski, J. - Nowicki, A.: Quaternionic Six-Dimensional Twistor and Supertwistor Formalism, in preparation
- [5] Wells, R.O.: Bull. Am. Math. Society, 1 (1979), 296.
Eastwood, M.G. - Penrose, R. - Wells, R.O.: Comm. Math. Phys., 78 (1981), 305.

- [6] Salam,A.- Strathdee,J.: Fortsch.Phys., 26 (1978), 57.
Sohnius,M.F.: Phys.Rep., 128 (1985), 39.
- [7] Lukierski,J.- Nowicki,A.: Ann.Phys., (NY), 166 (1986), 164.
Gilmore,R.: Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their
Applications, Wiley, New York, 1974.
- [8] Sudbery,A.: Math.Proc.Camb.Phil.Soc., 85 (1979), 199.
Gürsey,F.- Tze,H.: Ann.Phys. (N.Y), 128 (1980), 29.
Girard,P.R.: Eur.J.Phys., 5 (1984), 25.

VIDA JÓZSEF - KULCSÁR JÁNOS

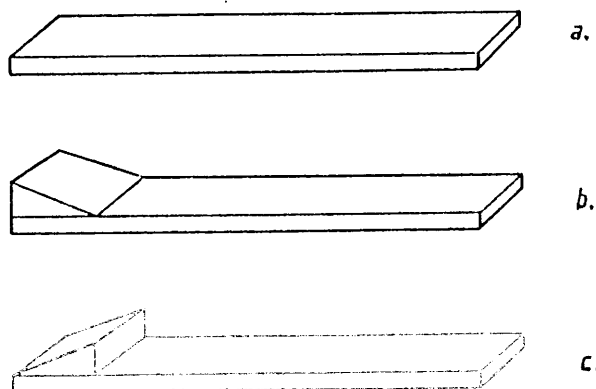
A SPEKTRÁLIS FELBONTÓKÉPESSÉG (II.)

ABSTRACT: *This dissertation expounds the functionary mechanism of the Lummer - Gehrcke - sheet (interferometer) which is usual in interference spectroscopy. Then it proposes a criterium for the capacity of disintegration. Starting from the Airy-form, under the criterium, it determines the measurement of the capacity of disintegration to the last (which can be made in practice) interference categories. We worked the task out with computers because of the respectable quantity of the mass of facts.*

1. A Lummer-lemez

A soksugaras interferométerek egyike a Lummer-lemez. Lényegében egy 10-30 cm hosszú, 2-5 cm széles és 3-10 mm vastag téglatest alakú üveg vagy kvarclemesz. Megfelelő működéséhez a két legnagyobb szembenlevő lapjának pontosan plánparalellnek és igen nagy simaságúnak $(\sim \frac{\lambda}{40})$ kell lennie.

Az első ilyen soksugaras interferométert O. Lummer készítette 1901-ben (1.a. ábra), majd 1903-ban E. Gehrcke módosította úgy, hogy egy totálreflexiós prizrát ragasztott a lemezre (1.b. és c. ábra).

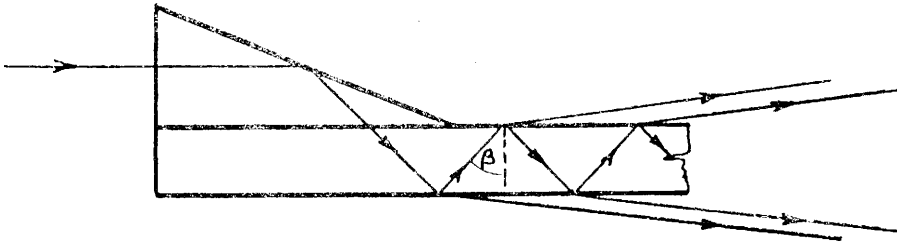


1. ábra

Működése az alábbi: a vizsgálandó fényforrás párhuzamosított sugárnyalábja a kis üvegprizmán át a lemezbe jut (2. ábra), ahol sokszoros reflexió megy végbe úgy, hogy a lemezben a beesési szögek (θ) megközelítik a teljes visszaverődés határszögét. Nagy beesési szögek esetén a visszaverőképesség is nagy ($R \approx 0,95$), így a fény intenzitása egy-egy visszaverődéskor alig csökken, s ezáltal a lemezből - azt csaknem súrolva - sok, közel egyenlő intenzitású, koherens nyaláb lép ki. A kilépő, szomszédos fénynyalábok között állandó az optikai útkülönbség s vele együtt a fáziskülönbség. Interferenciájuk létrejöttékor olyan irányokban erősítik egymást, amelyekben az útkülönbség (Δ) a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$\Delta = m\lambda . \quad (1.1)$$

Az itt szereplő m az interferencia rendszáma, ami a nagy útkülönbségek miatt mindig nagy értékeket vesz fel.



2. ábra

Határozzuk meg az erősítés feltételét! A fáziskülönbség (δ) a szomszédos nyalábok között:

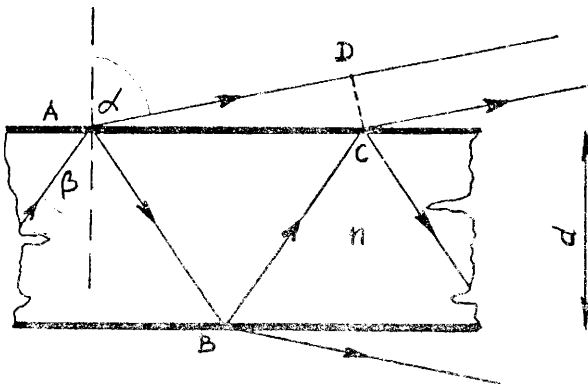
$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta . \quad (1.2)$$

Legyen a lemez vastagsága d , anyagának környezetéhez viszonyított törésmutatója n (3. ábra). Az ábra segítségével határozzuk meg a Δ útkülönbséget!

$$\Delta = (AB+BC) - AD .$$

A nyalábok kilépési pontjainak távolságával:

$$\Delta = \frac{AC}{\sin \beta} - AC \sin \alpha .$$



3. ábra

A két különböző úton haladó nyaláb fázisa a C ill. D pontban:

$$\delta_C = \frac{2\pi}{\lambda'} \frac{AC}{\sin\beta} \quad \delta_D = \frac{2\pi}{\lambda} AC \sin\alpha$$

(ahol λ' a fény hullámhossza a lemezben).

A fáziskülönbség:

$$\delta = \delta_C - \delta_D = \frac{2\pi AC}{\lambda} \left(\frac{n}{\sin\beta} - \sin\alpha \right).$$

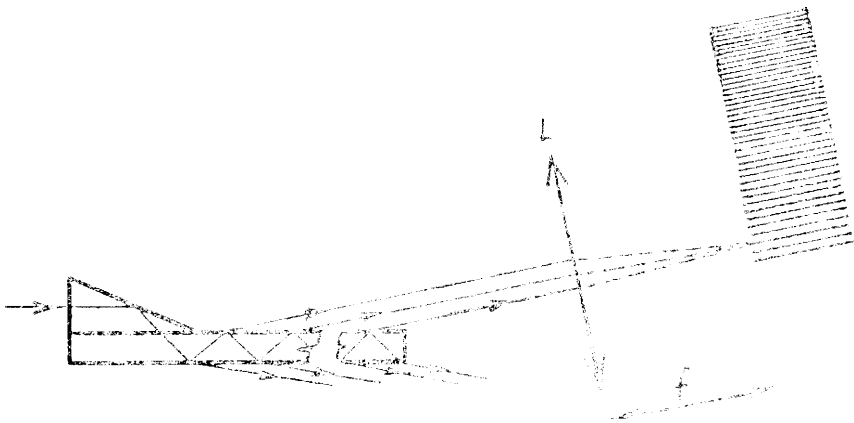
Itt felhasználtuk a $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ kapcsolatot, majd trigonometrikus összefüggések segítségével jutunk az alábbi alakhoz:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} d \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \quad (1.3)$$

Az 1.1, 1.2 és 1.3 -ból megkapjuk az interferencia során létrejövő erősítés feltételét:

$$m\lambda = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}. \quad (1.4)$$

Az interferencia a kilépő nyalábok útjába állított gyűjtőlencse fókuszsíkjában, intenzív, világos hiperbólacsíkok alakjában jelentkezik (4. ábra).



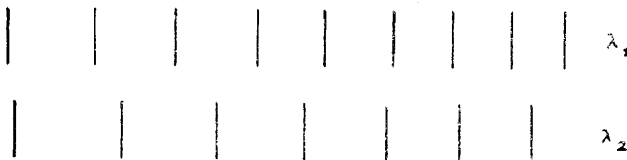
4. ábra

A sok nyaláb interferenciája éles maximumokat, azaz a sötét csíkoknál jóval keskenyebb, intenzív vonalakat eredményez. A megegyező fáziskülönbségű hullámok mind ugyanazon rendű maximumvonalon erősítik egymást.

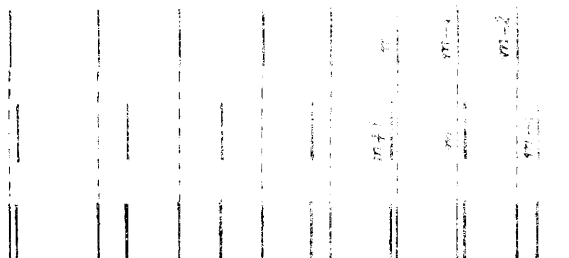
Egy adott hullámhosszat egy hiperbólacsík-sorozat reprezentál, amelyben az egyes csíkok az interferencia rendszámát is meghatározzák. Az m rendszám azt jelenti, hány hullámhossznyi a szomszédos nyalábok között az optikai útkülönbség. Ebből értelemszerűen következik, hogy a legbelső (a 4. ábrán a legalsó) csíkok adják a legmagasabb számú rendeket.

2. A Lummer-lemez felbontóképessége

Amennyiben egy fényforrás pl. két hullámhosszon sugároz, akkor mind a két hullámhosszat különálló csíkrendszer (vonalrendszer) képviseli. Ha a hullámhosszkülönbség elég nagy, úgy az egyik (λ_1) interferenciacsíkjainak távolsága kisebb a másikonál (λ_2) (5.a ábra), aminek következtében az összegzetten jelentkező interferenciaképen a λ_2 vonalsorozat m -edik rendje átfedi (megelőzi) a másik vonalsorozat $(m-1)$ -edik rendjét (5.b ábra).



5.a ábra



5.b ábra

Elég kicsi szinképi komponenstávolságok esetén átfedés nem jön létre, a megfelelő rendek mind egymás mellett jelennek meg (6. ábra). A Lummer-lemez felbontóképességén múlik, hogy adott $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ hullámhosszkülönbség esetén az egyes hullámhosszakhoz tartozó csíkok elkülöníthetők vagy sem.



6. ábra

A Lummer-lemez elméleti felbontóképességére F. Koláček 1912-ben állapított meg egy formulát, amely a lemezt "súrlódó" szög alatt elhagyó nyalábok esetében a következő:

$$R_s = \frac{l(n^2 - 1)}{\lambda} . \quad (2.1)$$

Ahol l az első és utolsó reflexió közötti távolság, n a lemez törésmutatója, λ pedig a vizsgált fény hullámhossza. A Koláček-formula a felbontóképességre l növelésével egyre magasabb értéket ad a valóságosnál. A lemezben végbemenő abszorpció miatt az l növelése a felbontóképesség

növekedését a fenti mértékben nem eredményezheti, így a formula csak közelítő számításoknál fogadható el. (Hansen 1930-ban Williams-nek írt levelében hívja fel erre a figyelmet).

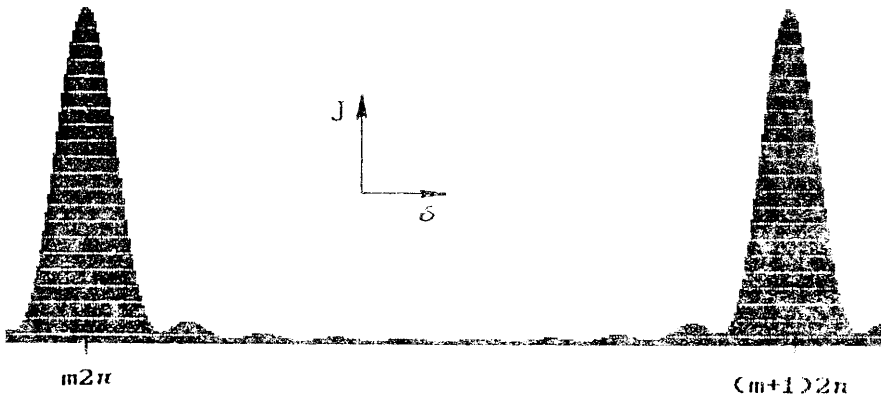
Az alábbiakban kísérletet teszünk a Lummer-lemez felbontóképességének az intenzitásgörbe (vonaprofil) segítségével történő meghatározására.

Mindenekelőtt ismernünk kell a csík(ok) intenzitásgörbéjét. (Az interferenciakép csíkjaira merőleges irányban vett "intenzitásmetaszt"-ről van szó). A Lummer-lemezt elhagyó P számú sugárnyaláb interferenciájából adódó intenzitásfüggvény az általános Airy-formulával írható le:

$$J = \frac{(1-R^P)^2 + 4R^P \sin^2(P \delta/2)}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\delta/2)} . \quad (2.2)$$

E fenti intenzitáseloszlási formula a 7. ábrán látható ún. sávgörbét eredményezi ($P=10$, $R=0,9$), ahol a δ egyéb lemezparaméterek mellett még a hullámhossznak és a lemezt elhagyó nyaláb α szögének is függvénye (lásd az 1.3).

Az elsőrendű intenzitásmaximumot az első minimum, majd a másodrendű maximum stb követi. Az elsőrendű intenzitásmaximumok $\delta=2\pi$ szerint ciklikusan ismétlődnek.



7. ábra

(A profilgörbén látható apró lépcsőzetesség a számítógépes grafika kis felbontóképessége miatt van.)

Két közeli hullámhossz esetében a sávgörbék eredőjét a 8. ábra szemlélteti. A felbontóképesség ezen λ_1 és λ_2 vonalak egymástól való megkülönböztethetőségére fogalmazandó meg.



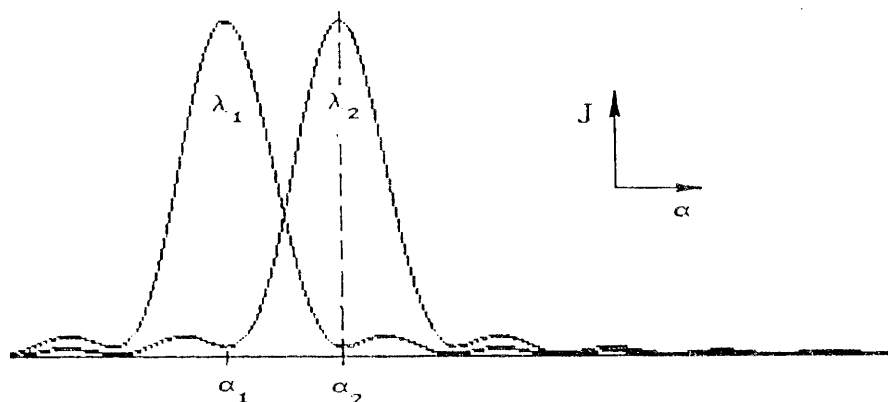
8. ábra

A Rayleigh-kritérium alapján szeretnénk a Lummer-lemez felbontóképességére egy használható kritériumot definiálni. Előzetesen két dolgot kell figyelembe venni: egyrészt ezen intenzitásgörbék profilja nem egyezik meg a Fraunhofer-féle elhajlászörbe alakjával, másrészt az Airy-formulával megadott sávgörbe intenzitása a zérus értéket sehol sem veszi fel.

A most lefektetendő kritérium definiálására két lehetőség kínálkozik:

- a.) A Rayleigh-kritériumban adódó intenzitásarányt alapul véve: akkor tekintünk két azonos intenzitású interferenciacsíkot éppen felbontottnak, ha az eredő (relativ) intenzitásgörbén megjelenő két maximum közötti nyereg intenzitásaránya 0,81 értéket vesz fel.

b.) A Rayleigh-kritérium alapfeltevését alkalmazva esetünkre: akkor tekintünk felbontottnak két közeli interferenciacsíkot, ha az azokat megadó sávgöbök elsőrendű maximumai úgy helyezkednek el egymás mellett, hogy a λ_1 elsőrendű maximuma egybeesik a λ_2 első minimumával (9. ábra).



9. ábra

Az a.) változat nem vezet eredményre, mert a 0,81 -os nyeregmagasság nem tartozik reprodukálható $\Delta\lambda$ hullámhosszkülönbséghez. Az ezzel kapcsolatos vizsgálat eredményeit így itt nem említjük, a továbbiakban csak a b.) változat kifejtésére szorítkozunk.

3. A sávgörbe vizsgálata

A 2.2 Airy-formulát elemezve, megállapítható, hogy annak maximuma a számlálóban és nevezőben szereplő szinuszfüggvények zérusértékénél van. Belátható, hogy ehhez elegendő a nevezőben levő szinuszfüggvény vizsgálata.

A $\delta = (n-1)2\pi - n2\pi$ intervallumokban a nyalábszámtól függően P-2 helyen találunk relatív maximumot. A hullámvölgyek száma pedig P-1 (lásd a 7. ábrát).

A vizsgálat során az is megmutatkozott, hogy δ mindenkori értékét - az állandó paraméterek mellett - α határozza meg (lásd az 1.3). Ez abban nyilvánul meg, hogy az α egyenletes csökkentésével sűrűsödő maximumsorozathoz jutunk.

Számítógép segítségével a meghatározott hullámhosszak mindegyikén megvizsgáltuk ($\alpha=90^\circ$ -tól 87° -ig terjedő intervallumban) a $\sin(\delta/2)$ zérushelyeit. Ezután az elsőrendű maximumok és az azt követő első minimumok (α szerinti) helyeit és intenzitásértékeit számítottuk ki az Airy-formula felhasználásával, a 400-800 nanométeres tartományban, a kiválasztott nyolc hullámhossz mindegyikén az utolsó húsz rendre.

4. A felbontóképesség meghatározása

A tapasztalat szerint az utolsó és az azt megelőző rendhez tartozó csík deformáltan, elmosódottan jelentkezik, amit az elméleti számítások is alátámasztanak. E miatt a vizsgálat során a két utolsó rendet figyelmen kívül hagytuk. A felbontóképesség meghatározása a kiválasztott hullámhossz kiválasztott rendjén az alábbiak szerint történik: Képezzük azt a λ_2 hullámhosszat, amely alig különbözik λ_1 -től (lásd a 6. ábra), elsőrendű intenzitásmaximuma pedig egybeesik a λ_1 azonos számú rendjének intenzitásmaximumát követő első minimumával (9. ábra). A $\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda$ hullámhosszkülönbség az Airy-formula segítségével meghatározható. Ugyanis, ha a λ_1 -hez tartozó maximum α_1 helyen, a λ_2 -höz tartozó α_2 helyen van, akkor az ezekből képzett $\sin(\delta/2)$ -nek mindkét esetben zérushelye van:

$$\sin\left\{\frac{\delta_1}{2}\right\}=0, \quad \sin\left\{\frac{\delta_2}{2}\right\}=0.$$

Mivel

$$\delta_1 = \frac{4\pi d}{\lambda_1} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} ,$$

és

$$\delta_2 = \frac{4\pi d}{\lambda_2} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2} ,$$

ezért a hullámhosszak között a

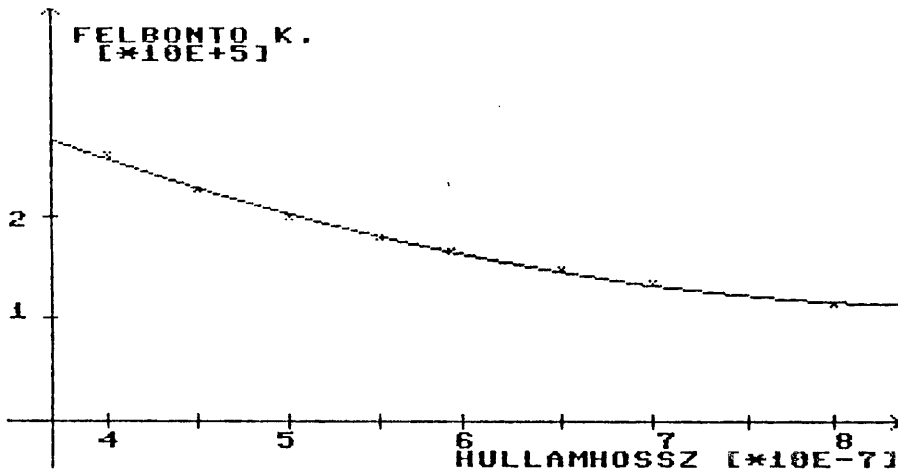
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{n^2 - \sin^2 \alpha_2}{n^2 - \sin^2 \alpha_1}} \quad (4.1)$$

összefüggés állapítható meg, aminek segítségével, és az ismert adatok felhasználásával a felbontóképesség $\left(R_o = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right)$ az alábbi módon meghatározható:

$$R_o = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} . \quad (4.2)$$

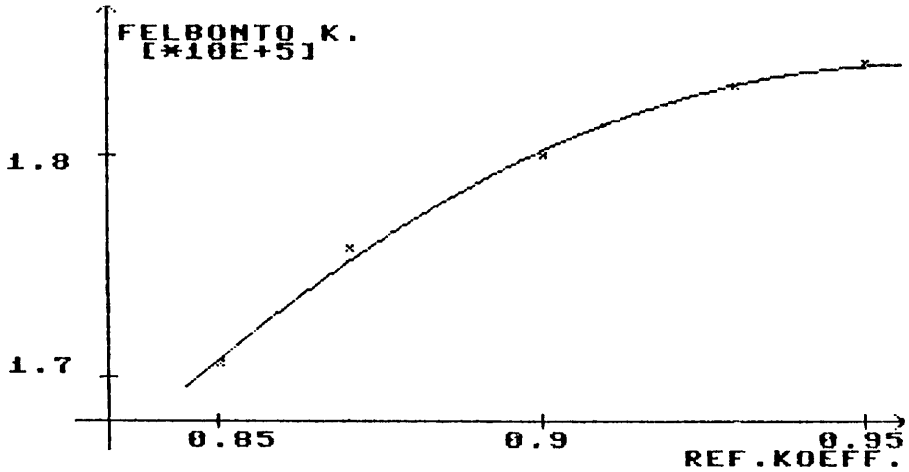
A számítógépes adatsor áttanulmányozása után az alábbi következtetésekre jutottunk:

- a.) A Lummer-lemez felbontóképességének nagysága függ a hullámhossztól (10. ábra). Kisebb hullámhosszakon nagyobb felbontás érhető el és fordítva.

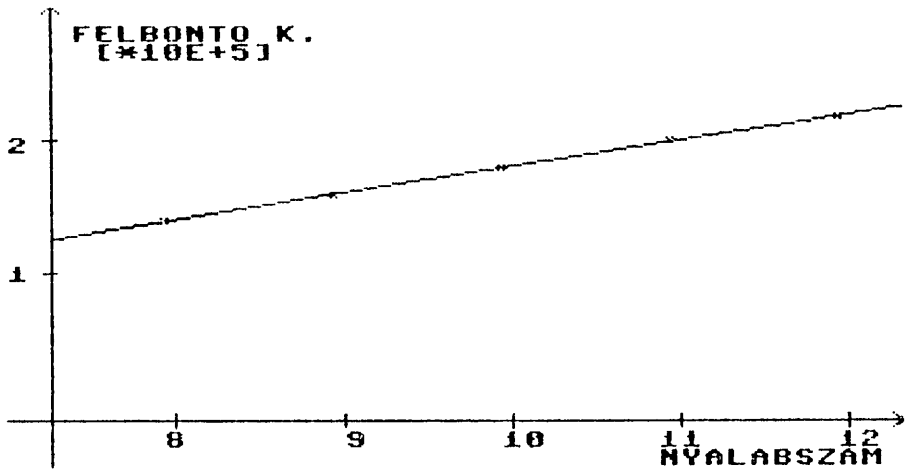


10. ábra

b.) Minél nagyobb a reflexiós koefficiens értéke, annál magasabb a felbontóképesség is (11. ábra). A nagyobb nyalábszám ugyancsak nagyobb felbontást eredményez (12. ábra).

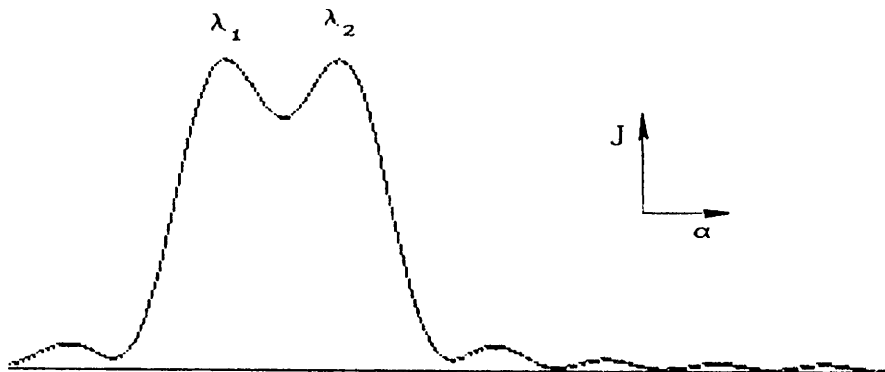


11. ábra



12. ábra

- c.) Egy hullámhosszon, az utolsó húsz renden belül a felbontóképesség konstans.
- d.) A λ_1 és λ_2 -höz tartozó intenzitásgörbék eredőjén (13. ábra) (amit az egyes görbék azonos α_i helyen vett lokális intenzitásértékeinek összegezésével nyertünk) jelentkező nyereg relatív magassága $0,8076 \pm 0,0003$ értéket vesz fel minden hullámhosszon és minden rendben. Összevetve ezt a Rayleigh-féle $\frac{\theta}{\pi^2} = 0,8106$ arányszámmal, megállapíthatjuk, hogy a Lummer-lemez általunk definiált felbontóképesség-kritériumával meghatározott nyereg-magasság valamivel alacsonyabb, mint a Rayleigh-kritérium által meghatározott. A kapott eredmény biztató egy, a fenti munkát követő kísérleti felbontóképesség vizsgálathoz.



13. ábra

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Budó Á. - Mátrai T.: Kísérleti fizika III.
Tankönyvkiadó Bp. 1977.
- [2] Horváth J.: Optika (Elektromágneses fényelmélet)
Tankönyvkiadó Bp. 1966.
- [3] Kiss L. - Patkó Gy. - Vida J.: Eljárások interferencia-
spektroszkópiai bontóelemek praktikus
felbontóképességének kísérleti meg-
határozására.
Tudományos Közlemények Eger, 1982.
- [4] Mátrai T.: Gyakorlati spektroszkópia
Műszaki Könyvkiadó, 1963.
- [5] Mika J. - Török F.: Emissziós színeképelemzés
(elméleti rész)
Akadémiai Kiadó Bp. 1968.
- [6] Nussbaum - Phillips: Modern Optika
Műszaki Könyvkiadó 1982.
- [7] Tolansky S.: High Resolution spectroscopy
New York - Chicago, 1947.
- [8] Vida J.: A spektrális felbontóképesség I.
Tudományos Közlemények Eger, 1989.
- [9] Vida J.: A Lummer-lemez optikai felbontóképessé-
gének kísérleti meghatározása
(Egyetemi doktori dolgozat) Eger, 1984.

PATKÓ GYÖRGY - VIDÓ IMRE

AZ ÉGBOLT SZÓRT FÉNYE POLARIZÁCIÓJÁNAK KISÉRLETI VIZSGÁLATA

ABSTRACT: *In the paper we expound a method for the determination of the meridian of Eger. The results of our measurements are compared to the meridian data of the Museum of Astronomy at Eger. We have found a difference of $1,5-2^{\circ}$. We summarize some laws of the polarisation of scattered sky-light and report the results of a measurement carried out during a day.*

Az égbolt szórt fénye részlegesen polarizált - polarizálatlan és lineárisan polarizált fény keverékéből áll. A jelenséget 1809-ben Aragó fedezte fel.

A fényszóródás az optika egyik alapjelensége. A fényszórás lehet koherens, vagy inkoherens. Az égbolt szórt fényének jelensége koherens fényszóródással a Rayleigh és a Mie elméletekkel értelmezhető.

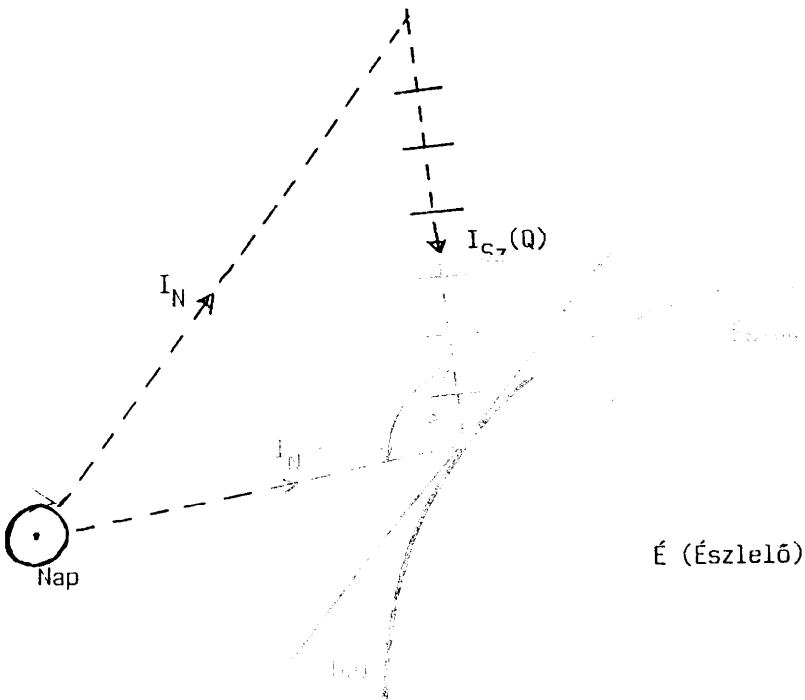
Az égbolt polarizációja a polarizálatlan napfényének a légkör molekuláin durva diszperz rendszerein, párarészecskéin való szóródásával jön létre.

Az olyan fényt szóró centrumokra, amelyeknek sugara kisebb, mint a beeső fény hullámhosszának a tized része, a jelenség magyarázatát a Rayleigh-féle elmélettel adhatjuk meg.

Ha azonban a fényt szóró részecskék a fény hullámhosszánál lényegesen nem kisebbek, a jelenség a Mie-féle elmélettel vizsgálható.

További részletes elméleti és kísérleti fejtegetés a [7] (625.o) forrásmunkában található.

Az égbolt szórt fényét a Nap és a Föld középpontjai: és az észlelő által meghatározott síkhoz viszonyítva vizsgálhatjuk. A Nap és az észlelési pont által meghatározott egyenesre az égboltról az észlelőhöz merőlegesen érkező fény részlegesen polarizált. (1. ábra). Az égboltról szóródott poláros fény rezgési síkja merőleges az észlelési síkra. A polarizációs síkot (M-49) polárszűrővel határoztuk meg.



1. ábra

Méréseink minél pontosabb végrehajtásához szükséges volt a földrajzi (csillagászati) É-D-i irány bemérése! (A mágnesű erre nem alkalmas!)

Mikor van egy földrajzi helyen dél? Világos hogy akkor, amikor a Nap látszólagos pályájának a legmagasabb pontjában van! Nem kell tehát mást csinálni, mint kb. 3 órán keresztül 2-3 percenként valahogyan jelölni az A_1 ; A_2 ; ... A_n pontok helyét! Ahol $\overline{OA_n}$ minimum, akkor van dél, és az az irány mutatja az É-D-i irányt! (Egy kis türelem kell ehhez a méréshez!)

Mintegy 50 nap volt jó 1988 nyarán méréseink végzésére. Méréseinket az Egri Tanárképző Főiskola Fizika Tanszékének a kertjében végeztük.

Az É-D irány mérését függőőnnal végeztük. A minél nagyobb pontosságra törekvés érdekében egy 1,5 m hosszú fonálra erősített un. akasztós (3 db) súlyokkal - s ezek árnyékvetületének jelölésével és mérésével - végeztük.

Mint érdekességet legyen szabad megemlítenünk, hogy Egerben a Lyceum csillagdájában is végeztünk egy mérést a Hell Miksa irányításával (mintegy 200 évvel ezelőtt!) kitűzött és megépített un. meridián vonalon is.

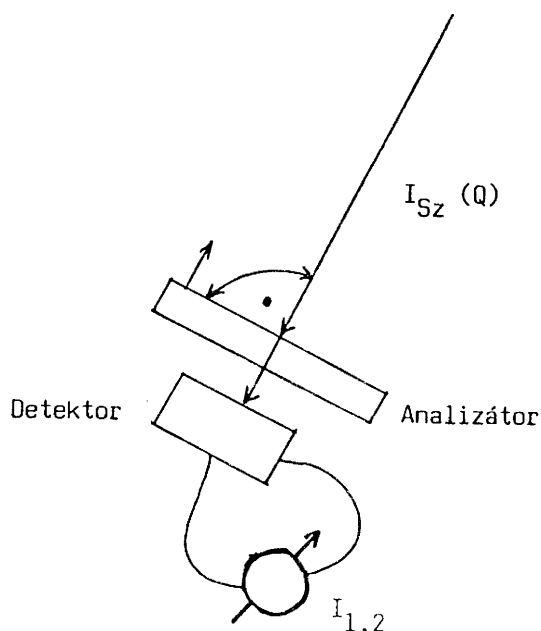
Érdekes, hogy kb. 1,5-2 fok eltérést tapasztaltunk! (Ny-i irány!)

Ezzel kapcsolatban néhány megjegyzés:

- egy mérés nem mérés!
- nem biztos, hogy a Hell által kiszámított adatoknak 100 %-osan megfelelt a szokásos kivitelezés,
- legvalószínűbbnek tartjuk azt, hogy néhány kisebb földrengés is volt az elmúlt 200 év során Egerben, s az épület mozdult.

A szórt, részlegesen polarizált fény forgatható analizátoron át árammérővel összekapcsolt fotodetektorra esik. (3. ábra)

A fény hatására adott szögállásnál az analizátor maximális fényáramot bocsát a detektorra, ekkor az árammérő I_1 áramot mutat. Az analizátort 90° -kal elfordítva az áteső fényáram minimális, az árammérő I_2 áramot mutat.



3. ábra

A szórt fény Q polarizáció fokát a következő összefüggéssel határoztuk meg:

$$Q = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} .$$

A polarizációfok függ a tengerszint feletti magasságtól $Q=Q(h)$. Méréseket végeztünk Egerben és Kékestetőn és a jelenség könnyen igazolható. (4.)

A polarizáció függ a fény hullámhosszától is.

A mérés időpontja	fehér	vörös	sárga	kék
1899.04.04	0,6101	0,5962	0,6494	0,6332
06.04	0,3971	0,4258	0,3616	0,3338

A $Q=Q(\lambda)$ összefüggés is demonstrálható.

Közzöljük az Egri Tanárképző Főiskola Fizikai Tanszékén 1988.08.11 -én végzett napkeltétől napnyugtáig a méréseket:

Sorsz.	idő(h)	$I_0(A)$	$I_1(A)$	$I_2(A)$	Q%	$p_{mbár}$	φ rel%	$t^{\circ}C$
1.	4.30	1,2	0,4	0,15	45,45	1011	78	15
2.	4.45	3,1	1,3	0,93	16,59	1010	78	15
3.	5.00	6,7	3,3	2,03	23,83	1011	77	16
4.	5.30	15	8,06	5,63	17,75	1011	77	17
5.	6.00	19,7	10,9	8,5	12,37	1011	77	18
6.	6.30	23,9	14	11,03	11,86	1011	76	19
7.	7.00	25	15,06	11,13	15	1011	77	19,5
8.	7.30	25,5	16	12	14,28	1012	76	20
9.	8.00	25	15,66	11,53	15,18	1012	69	24,5
10.	8.30	26,1	16,4	12,26	14,44	1011	75	25
11.	9.00	24	15,8	11,7	14,9	1011	73	25
12.	9.30	24	15,93	12,33	12,73	1011	72	26
13.	10.00	25	16,7	12,96	12,6	1011	69	26,5
14.	10.30	24,5	16,1	12	14,59	1010	66	27,5
15.	11.00	24	15,7	12,03	13,23	1011	65	28
16.	11.30	23,5	15,93	12	14,07	1011	64	29
17.	12.00	23,5	15,7	12,13	12,82	1011	62	25
18.	12.30	24	16,16	13	10,83	1011	59	30,5
19.	13.00	25,5	17	14,33	8,52	1010	58	31
20.	13.30	23,2	14,9	12	10,78	1010	57	31
21.	14.00	24,3	15,9	12,3	12,76	1010	59	32
22.	14.30	25	15,8	12	13,66	1009	57	31
23.	15.00	24,5	15,76	12,2	12,73	1012	57	31
24.	15.30	24,6	15,26	11	16,22	1009	57	31
25.	16.00	23	14	10,63	13,68	1012	56	30
26.	16.30	20,5	11,2	9,1	10,34	1009	57	29,5
27.	17.00	19,3	10,03	9,0	5,41	1009	57	28,5
28.	17.30	23,2	13,06	11,16	7,84	1009	57	29,8
29.	18.00	12,2	6,03	4	20,23	1009	59	28
30.	18.30	8	3,6	2,23	27,24	1009	61	26,5
31.	19.00	1,5	0,56	0,13	62,31	1009	66	25

1. A mérések sorszáma;
2. A mérési idő;
3. A szórt fényének fotoárama;
4. Max.: I_1 ;
5. Min.: I_2 ;
6. Q ;
7. P_{mb} ;
8. φ % páratartalom;
9. $t^{\circ}C$ hőmérséklet

A mérésből kiolvasható, hogy:

- a Nap kelte és nyugta szórt fényének polarizációja nagy;
- a felhőtlen kék égbolt polarizációja nagyobb, mint a felhős égboltté;
- a légtér szennyezettségének növekedése általában növeli a szórt fény intenzitását, a polarizáció foka viszont csökken. (19. mérés)

A szórt fény polarizációjának változásával környezet szennyeződés mérhető.

Az ég felhők által el nem takart más tájairól szóródott fényének részleges polárosságát egyes rovarok (pl.: méhek) szemükkel érzékelni képesek, és ezt felhők árnyékában helyzetváltoztatásuknál fel is használják tájékozódásra.

Polarizációs jelenség figyelhető meg a növények leveleinek optikai reflexiójánál is.

IRODALOM

- [1] A természettudományok zsebkönyve.
Gondolat Kiadó, 1963. Budapest
- [2] Kulin György - Zerinváry Szilárd: A távcső világa
Gondolat Kiadó, 1958. Budapest
- [3] Mátrai Tibor - Patkó György: Fénytan
Tankönyvkiadó, 1976. Budapest (Főiskolai jegyzet)
- [4] Öveges József: Kisérletezzünk és gondolkozzunk
Gondolat Kiadó, 1979. Budapest
- [5] Patkó György: A növények leveleinek optikai reflexiója
Hevesi Művelődés, 1977.1.
- [6] Patkó György: Az égbolt fényének polarizációja
Hevesi Művelődés, 1978. 1. 15. old.
- [7] I. J. M. Pertner: Meterologische Optik
Wien und Leipzig. 1902.
- [8] Vermes Miklós: A poláros fény
Műszaki Könyvkiadó, 1967. Budapest

FRANCZIA TAMÁS

A KVANTUMMECHANIKAI IMPULZUS ELTOLÁSI SZIMMETRIÁVAL TÖRTÉNŐ
BEVEZETÉSÉRŐL IV.

(A klasszikus- és a kvantummechanika egymáshoz való viszonya)

ABSTRACT: *The purpose of this study consisting of several parts is to define the quantum-mechanical momentum with a moving symmetry in teaching quantum-mechanics at universities. In consequence of some methodological points of view and for the sake of less size of the article the discussion supposes that students have got acquainted with the principles of quantum mechanics can be found in George Marx's book on quantum-mechanics. In this part of the study we introduce the wave-function of quasi-classical form.*

A cikksorozat célja az, hogy bemutasson egy módszert a kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetésére az egyetemi oktatás szemináriumai számára. A tárgyalásmód didaktikai és terjedelmi okokból feltételezi, hogy a hallgatók már megismerkedtek a kvantummechanika alapjainak olyan, az egyetemi oktatásban leginkább elterjedt kifejtésével, mely hazánkban Marx György "Kvantummechanika" c. könyve nyomán vált széles körben ismertté. Mivel a fizikai mennyiségek szimmetriákkal történő bevezetése a kvantummechanika egy másik felépítését eredményezi, célszerűnek láttuk, hogy először összefoglaljuk azon definíciókat, axiómákat és tételeket, melyeket ismerni kell ahhoz,

hogyan az impulzust logikailag kellően megalapozva vezessük be eltolási szimmetriával. A nem bizonyított tételeknél Marx György már idézett művére utalunk a bizonyítást illetően.

A 14. tételből (a kvantummechanikai időderivált tétele) következett, hogy ha egy kvantummechanikai rendszer Hamilton-operátora független az időtől, akkor várható értékének időbeli deriváltja nulla. A 15. tételből és a XII. axiómából adódott, hogy egy időtől független Hamilton-operátorú rendszer állapotfüggvénye $\psi_k = \varphi_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \exp \left[-\frac{2\pi i}{h} H_k t \right]$ alakú, ahol H_k ill. φ_k a \hat{H} sajátértéke, ill. sajátfüggvénye. \hat{H} várható értéke ebben a normált állapotban maga a H_k sajátérték: a 8. tétel alapján: $\bar{H} = (\psi_k, \hat{H} \psi_k) = (\psi_k, H_k \psi_k) = H_k (\psi_k, \psi_k) = H_k$, amely független az időtől. A 7. tétel a VIII. axióma és együttes következményük alapján kapjuk, hogy $\hat{H}\psi_k = H_k\psi_k$ esetén H_k mérési valószínűsége 1, ha a rendszeren \hat{H} aktuális sajátértékének mérését hajtjuk végre.

Egy klasszikus mechanikai tömegpontrendszer mozgását leírhatjuk a konfigurációs térben a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek segítségével, illetve a fázistérben a kanonikus egyenletek vagy a Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet felhasználásával. Az utóbbi az S hatásfüggvény meghatározásán át szolgáltatja a mozgás leírását. A Lagrange-, illetve a Hamilton-függvény akármelyikének explicit időfüggetlenségéből levezethető, vagy triviálisan adódik a rendszer mechanikai energiájának megmaradása.

A kvantummechanikai rendszerek mozgását az időtől függő Schrödinger-egyenlet írja le a nemrelativisztikus spintől független kvantummechanikában, mely a rendszer Hamilton-operátorából kiindulva írható fel. (Vö. azzal a ténnyel, hogy az előbbiekben említett klasszikus mechanikai mozgásegyenletek rendre a Lagrange-, ill. a Hamilton-függvény

ismeretében írhatók fel.) A Hamilton-operátornak az időtől való explicit függetlensége szintén azt eredményezi, hogy a rendszer adott stacionárius állapotától függő értékű mozgásállandó, egy H_k sajátérték rendelhető hozzá a rendszerhez.

14. Definíció: Az eddigiek alapján a Hamilton-operátor sajátértékeit a klasszikus mechanikai rendszerek energiájával analóg mennyiségnek tekinthetjük, ezért \hat{H} -t a kvantummechanikai energia operátorának nevezzük. A két mennyiség közötti analógiára utalnak a továbbiakban kifejtett gondolatok is.

Ismeretes, hogy már egy a nemrelativisztikus és a spint nem tartalmazó kvantummechanika törvényeivel leírható szabad részecske elhajlás és azt követő interferencia-jelenséget mutat miután elegendően kicsi résen halad keresztül. Ezek a jelenségek értelmezhetők úgy, hogy a szabad részecskét meghatározott hullámhosszal rendelkező hullámnak tekintjük, melynek hullámhosszát a felfogó ernyőn létrehozott képhől úgy kell meghatározni, hogy az ismert szélességű résen egymás után bocsátunk át azonos körülmények között kilőtt és így azonos kvantumállapotú szabad részecskéket olyan időközönként, hogy azok egymással ne léphessenek kölcsönhatásba, és a felfogóernyőn létrejövő interferenciaképből a klasszikus optikában megismert összefüggések segítségével számítjuk a hullámhosszt. Az elhajlás matematikai tárgyalásakor abból a későbbiekben igazolt tényből indulunk ki, hogy a szabad részecske ψ -je síkhullám alakú, mely síkhullám hullámhosszát tekintjük a részecske hullámhosszának. Az elhajlás a ψ által reprezentált síkhullám résen való elhajlásával modellezhető matematikailag. Az elhajlást követő interferencia által eredményezett, a felfogóernyőn lévő képet a d szélességű rés különböző pontjaiból kiinduló "elemi ψ_i gömbhullámok" szuperpozíciójából kaphatjuk meg, mely az útkülönbségektől függően eredményez relativ maximumokat és minimumokat. (Az elektron elhajlás utáni állapotfüggvénye a rés pontjaiból kiinduló elemi

gömbhullámok interferenciájaként adódik.)

A résen való elhajlás a klasszikus mechanika alapján nem értelmezhető. A klasszikus mechanika és elektrodinamika alapján is leírható viszont egy elektronnak a hely függvényeként elegendően lassan változó erőterben való mozgása. Ezt mutatja a tapasztalat (pl.: a katódsugárcsőben való mozgás).

Tetszőlegesen változó elektromágneses erőterekben a részecske mozgása a kvantummechanikai szórás számítással írható le, mellyel az erőtéren való szóródás előtti állapotfüggvény és az erőteret leíró potenciál ismeretében a szóródás utáni állapotfüggvényt határozzák meg. ([1] 138-149.o.)

Ha a részecske mozgásának leírására a klasszikus mechanika is alkalmazható, akkor a klasszikus és a kvantummechanikai leírás közötti kapcsolat abban áll, hogy az utóbbiból a mozgás klasszikus trajektóriái meghatározhatók. A klasszikus leírás speciális esetben való alkalmazhatósága és a kvantummechanikai tárgyalás általános érvényessége arra mutat, hogy a klasszikus mechanika legalább határesetként benne van a kvantummechanikában. A dolgozat további részében ennek feltételeit vizsgáljuk.

A tapasztalat szerint a résnek elegendően kicsinek kell lennie ahhoz, hogy a részecske elhajlást szenvedjen a rajta való áthaladáskor. Pontosabban a rés szélességének összemérhetőnek kell lennie a már említett interferenciaképből számított hullámhosszal. Tetszőlegesen kicsi réshez elvben található olyan határ hullámhosszuság, melynél kisebb hullámhosszuságú részecske már gyakorlatilag nem szenved elhajlást az adott résen. Így a kvantummechanika szemszögéből nézve akkor közelítjük meg egyre jobban a klasszikus mechanikát, mely szerint nem lép fel a résen való elhajlás, ha a részecske hullámhosszával nullához tartunk, s így gyakorlatilag egyre szűkitjük azon résszélességek halmazát, melyhez tartozó réseken a részecske elhajlást szenved. (Vö. ezt azzal a ténnyel, hogy a sugárzás részecskejellege is a nulla

hullámhossz felé közelítve erősödik fel.)

A 15. tétel és a XII. axióma alapján egy az időt explicite nem tartalmazó Hamilton-operátorral bíró részecske állapotfüggvénye, s így a szabad (erőmentes térben mozgó) részecske állapotfüggvénye is $\varphi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H t\right)$ alakú. A szabad részecskére érvényes időtől függő Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

melynek a fenti alakú és a változók szorzatalakú szeperációjával kapható megoldása a következő:

$$\psi = A \exp \left[i \left(k_x x + k_y y + k_z z - 2\pi h^{-1} H t \right) \right], \text{ ahonnan}$$

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi = \frac{h^2 K^2}{8\pi^2 m} A \exp \left[i \left(k_x x + k_y y + k_z z - 2\pi h^{-1} H t \right) \right] \equiv H' \psi$$

mely utolsó egyenlőségéből $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 8\pi^2 m h^{-2} H'$. $\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t}$ jelen esetben $H\psi$ -vel egyenlő.

$$\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi = H' \psi \text{ miatt } H' = H.$$

Az állapotfüggvényre kapott kifejezés $\psi = A \exp \left[i \left(\vec{k} \vec{r} - 2\pi h^{-1} H t \right) \right]$ alakba írható, melyről látszik, hogy egy a \vec{k} vektor irányába haladó $\lambda = 2\pi |\vec{k}|^{-1} = 2h(8mH)^{-\frac{1}{2}}$ hullámhosszúságú síkhullámot ír le. Utolsó egyenletünket figyelembe véve a $\lambda \rightarrow 0$ határeset úgy adódik a kvantummechanikából, ha $h \rightarrow 0$. (Vö. azzal a már megtett megjegyzésünkkel, hogy a szabad részecske ψ -jének térbeli hullámhossza (periódusa) egyenlő a szabad részecske hullámhosszával.)

Vajon milyen egyenletbe megy át egy az időtől explicite független Hamilton-operátorú kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger-egyenlete a $h \rightarrow 0$ határesetben? Csak a látszat mutatja, hogy $ih(2\pi)^{-1} \partial_t \psi$ a nullához tart $h \rightarrow 0$ esetén. ψ

legáltalánosabb alakja az időtől explicite független Hamilton-operátorú rendszer esetében a 15. tétel alapján:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^f c_{kl} \varphi_{kl}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right) + \\ &+ \int_{H_{\alpha}}^{H_{\beta}} \sum_{l=1}^f c_{Hl} \varphi_H(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H t\right) dH. \text{ Tehát} \\ \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^f H_k c_{kl} \varphi_{kl}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right) + \\ &+ \int_{H_{\alpha}}^{H_{\beta}} \sum_{l=1}^f H c_{Hl} \varphi_H(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H t\right) dH, \end{aligned}$$

ami nyilván nem tart nullához, ha $h \rightarrow 0$. A térbeli parciális deriváltakat tartalmazó rész sem tart nullához $h \rightarrow 0$ esetén, mert ψ fenti alakjával az időtől függő Schrödinger-egyenlet ezen része

$$\begin{aligned} &-h^2(8\pi^2)^{-1} \sum_{i=1}^n m_i^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^f c_{kl} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right) \Delta_i \varphi_{kl} + \right. \\ &\left. + \int_{H_{\alpha}}^{H_{\beta}} \sum_{l=1}^f c_{Hl} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H t\right) \Delta_i \varphi_{Hl} dH \right], \text{ alakú, melybe a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{kl} &= \int_{\infty} \Phi_{kl}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n) \exp\left[i \sum_{j=1}^M \bar{K}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{K}_1, \dots, d^3\bar{K}_n \\ \varphi_{Hl} &= \int_{\infty} \Phi_{Hl}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n) \exp\left[i \sum_{j=1}^M \bar{K}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{K}_1, \dots, d^3\bar{K}_n \end{aligned}$$

Fourier-féle integrálekőállításokat behelyettesítve a Schrödinger-egyenlet vizsgált tagjára a következő kifejezés adódik:

$$\begin{aligned} &h^2(8\pi^2)^{-1} \sum_{i=1}^n m_i^{-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^f c_{kl} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right) \cdot \right. \\ &\cdot \int_{\infty} \Phi_{kl}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n) \cdot |\bar{K}_i|^2 \cdot \exp\left[i \sum_{j=1}^M \bar{K}_j \bar{r}_j\right] d^3\bar{K}_1, \dots, d^3\bar{K}_n + \\ &\left. + \sum_{l=1}^f \int_{H_{\alpha}}^{H_{\beta}} c_{Hl} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} H t\right) \cdot \left[\int_{\infty} \Phi_{kl}(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n) \cdot \right. \right. \end{aligned}$$

$$\cdot |\vec{K}_i|^2 \cdot \exp \left[i \cdot \sum_{j=1}^M \vec{K}_j \cdot \vec{r}_j \right] d^3 \vec{K}_1, \dots, d^3 \vec{K}_n \Big] dH.$$

Mivel a φ_{kl} és φ_{Hl} függvények Fourier-féle integrálegelőállításaiban szereplő \vec{K}_j vektorokra fennáll hogy

$$k_{xj}^2 + k_{yj}^2 + k_{zj}^2 = 8\pi^2 m_j \cdot h^{-2} H_j$$

ugyanolyan módon, mint a

$$\psi(\vec{r}, K) = \varphi(\vec{r}, K) \exp \left[-\frac{2\pi i}{h} H_k t \right] \text{ -beli } \varphi(\vec{r}, K) = A(K) \exp(iK \cdot \vec{r})$$

alakú φ függvények esetében, ahol már bizonyítottuk K -ra a megfelelő egyenleteket, a $|\vec{K}_i|^2$ kifejezések helyébe $\frac{8\pi^2 m_i}{h^2} H_i$ helyettesíthető. Ezek mindegyikéből kiemelhető $8\pi^2 h^{-2}$ a Schrödinger-egyenletben lévő most vizsgált tag i -szerinti összegzési művelete elé. Az ezen szummajel előtt szereplő $h^2(8\pi^2)^{-1}$ tényezővel szorozva a kiemelt tényezőt 1-et kapunk, tehát $h \rightarrow 0$ esetén a térbeli parciális deriváltakat tartalmazó tag sem tart nullához. A levezetésben felhasználtuk, hogy a φ_{kl} függvények négyzetesen integrálhatók, a φ_{Hl} függvényekről pedig, melyek nem négyzetesen integrálhatók, feltettük, hogy legalább Lebesgue-féle értelemben integrálhatóak a teljes konfigurációs térben. E feltételek mellett ugyanis léteznek az említett függvények Fourier-féle integrálegelőállításai.

A kérdés tehát az, hogy $h \rightarrow 0$ esetén milyen alakú egyenletbe megy át egy kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger-egyenlete. Megállapítottuk már, hogy a klasszikus mechanikának határesetben benne kell foglaltatnia a kvantummechanikában. Az időtől függő Schrödinger-egyenletnek tehát, olyan skaláris klasszikus mechanikai egyenletbe kell átmennie, mely leírja egy klasszikus mechanikai pontrendszer mozgását. Mivel egyetlen skaláris egyenletként a Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenlet tudja csak leírni a klasszikus mechanikai pontrendszerek mozgását (hiszen minden más lehetőség

egyenletrendszerre vezet!), egy kvantummechanikai rendszer időtől függő Schrödinger-egyenletének a Hamilton-Jacobi-féle parciális differenciálegyenletbe kell átmennie $\hbar \rightarrow 0$ esetén. Az átmenetnek a változók típusának szemszögéből nézve nincsen akadálya, hiszen mindkét egyenlet a térkoordinátákat és az időt tartalmazza független változókként.

Tekintsünk egy időtől független Hamilton-operátorú rendszert a $\psi_k = \varphi_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\hbar} H_k t\right]$ kvantumállapotban. Ezt behelyettesítve az időtől függő Schrödinger-egyenletbe:

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = H_k \psi_k \quad (1a) \rightarrow \frac{i\hbar}{2\pi} \frac{1}{\psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = H_k \quad (1b)$$

A Hamilton-Jacobi-egyenlet felírható az alábbi alakban:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n, t) \quad (2)$$

ahol S a klasszikus mechanikai rendszer hatásfüggvénye, H a rendszer Hamilton-függvénye, melynek helyettesítési értékei a rendszer lehetséges energiaértékei. Legyen most a klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-függvénye az időtől explicite független. Ekkor a rendszer mechanikai energiája időben állandó, és a kvantummechanikai, valamint a klasszikus egyenlet jobboldalán analóg mennyiségek szerepelnek.

$\hbar \rightarrow 0$ határesetben az (1b) egyenlet átmegy a klasszikus mechanikai (2) egyenletbe:

$$\frac{i\hbar}{2\pi} \frac{1}{\psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (3)$$

Az idő szerint integrálva kapjuk, hogy:

$$i \frac{\hbar}{2\pi} \ln [A_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \psi_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)] = -S \quad (4)$$

Rendezve

$$\psi_k = [A_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)]^{-1} \exp\left[\frac{2\pi i}{\hbar} S\right] \equiv A'_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left[\frac{2\pi i}{\hbar} S\right] \quad (5)$$

ahol $A'_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ -nek 1-re normálható függvénynek kell lennie. Azt kapjuk, hogy $\hbar \rightarrow 0$ esetén az időtől függő Schrödinger-egyenlet

$A'_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ alakú állapotfüggvénnyel bíró rendszer esetén megy át a rendszerhez rendelhető klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-Jacobi egyenletébe.

A $\psi_k = A'_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ alak ekvivalens a levezetésünk elején kikötött $\psi_k = \varphi_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{-\frac{2\pi i}{h} H_k t\right\}$ alakkal, $A'_k = \varphi_k$, és $S = -H_k t$, mely alakú utóbbi egyenlőség a klasszikus mechanikában akkor teljesül, ha a Hamilton-függvény nem függ explicit az időtől.

Feltehető a kérdés, hogy a $\psi = A'(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ állapotfüggvény alak a legáltalánosabb e ahhoz, hogy $h \rightarrow 0$ esetén a kvantummechanika átmenjen a klasszikus mechanikába. A kérdés megválaszolása végett helyettesítsük a $\psi = A'(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ függvényt az időtől függő Schrödinger-egyenletbe. Az $\exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ tényezővel és A' -vel való egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{m_l} \left[-\frac{h^2}{8\pi^2} \Delta_{\bar{r}_l} A' - \frac{ih}{2\pi} \left(\nabla_{\bar{r}_l} A', \nabla_{\bar{r}_l} S \right) + \frac{1}{2} \left(\nabla_{\bar{r}_l} S \right)^2 - \frac{ih}{4\pi} \Delta_{\bar{r}_l} S \right] + V \quad (6)$$

Mivel az S függvény ismert, hiszen ez a kvantummechanikai rendszerhez hozzárendelhető klasszikus mechanikai rendszer hatásfüggvénye, a (6) egyenlet ismeretlenje csak az A' függvény. Ezen egyenlet Kronecker vagy Dirac-típusú ortonormáltsági feltételeket kielégítő megoldásai használhatók fel a

$\psi = A'(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} S\right\}$ alakú állapotfüggvényekben.

Ha $h \rightarrow 0$, akkor a (6) egyenlet a $-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\text{grad}_{\bar{r}_l} S \right]^2 + V$ egyenletbe megy át, amely $\text{grad}_{\bar{r}_l} S = \bar{p}_l$ figyelembevételével éppen a kvantummechanikai rendszerhez rendelhető klasszikus mechanikai rendszer Hamilton-Jacobi-egyenlete. A fenti levezetésből látszik,

hogy ha ψ -t $\psi = A'(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, t) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$ alakban vennénk fel, ahol A' továbbra is kielégítené (6)-ot, akkor

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[i h (2\pi)^{-1} \partial_t A' - A' \partial_t S \right] \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$$

lenne, mely $h \rightarrow 0$ esetén ugyanolyan $- A' \partial_t S \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$ alakú kifejezésbe megy át, mint amilyen alakú (6) baloldala az A' -vel és $\exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$ -val való egyszerűsítés előtt. (6) jobboldalának alakja pedig nem változik meg azáltal, hogy A' az időt is explicite tartalmazza, mert a jobboldalon csak térkoordináták szerinti parciális deriválások szerepelnek.

Tehát az állapotfüggvény $A(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, t) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$ alakú is lehet az átmenet során. Mivel a (6) egyenlet minden oldala ugyanaz maradt $h \rightarrow 0$ esetén, ugyanugy a Hamilton-Jacobi-egyenlet adódik. Ezt a megengedhető $\psi = A(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n, t) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right)$ alakú állapotfüggvény kváziklasszikus állapotfüggvénynek hívjuk, a kvantumállapotot pedig kváziklasszikus állapotnak.

IRODALOM

- [1] Dr. Marx György: Kvantummechanika
Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- [2] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási
szimmetriával történő bevezetéséről I.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XVII. Eger, 1984.
- [3] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási
szimmetriával történő bevezetéséről II.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XVIII. Eger, 1987.
- [4] Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási
szimmetriával történő bevezetéséről III.
Acta Academiae Paedagogicae Agriensis Tom. XIX. Eger, 1989.

KISS LÁSZLÓ

A BOLTZMANN-FÉLE ÁLLANDÓ MEGHATÁROZÁSA A STEFAN-BOLTZMANN TÖRVÉNY
SEGÍTSÉGÉVEL

ABSTRACT: *At physical laboratories students of physics usually determine the values of physical constants. In this paper we expound a method worked out for measuring Boltzmann's constant. The application of this method wants optical (measurement of the dimensions of little objects), electrical (measurement of resistance) and atomic physical knowledge (the laws of the radiation of black objects).*

Kirchhoff-törvénye szerint bármely hőmérsékleti sugárzó emisszió- és abszorpcióképesség függvényének hányadosa az abszolút fekete test emisszióképesség függvényével egyenlő:

$$\frac{p(\lambda, T)}{a(\lambda, T)} = P(\lambda, T).$$

Az összefüggés integrális mennyiségekre is fennáll:

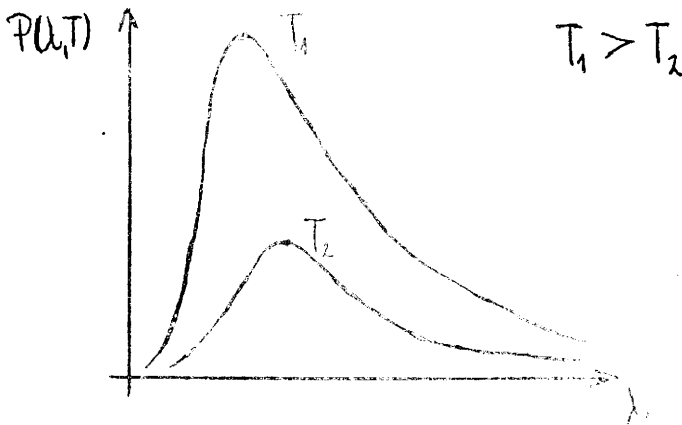
$$\frac{p(T)}{a(T)} = P(T).$$

Az abszolút fekete test összemiszióképessége a Stefan-Boltzmann törvény [2] szerint:

$$P(T) = \sigma T^4,$$

vagyis a sugárzó összes sugárzási teljesítménye az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos.

A $P(\lambda, T)$ értékét λ függvényében grafikonon ábrázolva beláthatjuk, hogy az összes sugárzási teljesítmény a $P(\lambda, T)$ függvény alatti területtel arányos. (1. ábra)



1. ábra

Az emisszióképesség meghatározását, valamint a Kirchhoff és a Stefan-Boltzmann törvényt felhasználva azt kapjuk, hogy az f felületű, az a abszorpcióképességű szürke sugárzó összes sugárzási teljesítménye:

$$P(T) = a f \sigma T^4$$

A képletben szereplő σ arányossági tényezőt Stefan-Boltzmann állandónak nevezzük.

Irodalmi értéke $(5,669\,7 \pm 0,002\,9) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. [5]

A Stefan-Boltzmann állandó fizikai állandók segítségével kifejezhető:

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} . \quad [11]$$

A formulában k a Boltzmann-állandó, c a fény vákuumbeli terjedési sebessége, h pedig a Planck-állandó. Az összefüggésből k értéke meghatározható:

$$k = \sqrt[4]{\frac{15 h^3 c^2 \sigma}{2 \pi^5}}$$

A Stefan-Boltzmann állandó meghatározására wolframszálas izzólámpát használunk.

Az izzólámpába betáplált elektromos teljesítmény:

$$P_0 = I^2 R(T).$$

Az izzólámpa energiavesztesége hővezetés és hőmérsékleti sugárzás következménye, vagyis:

$$P_v = \alpha(T-T_0) + f a \sigma (T^4 - T_0^4).$$

(α a sugárforrásra jellemző állandó, T az izzószál hőmérséklete, T_0 pedig a környezet hőmérséklete.)

Egyensúlyi állapotban:

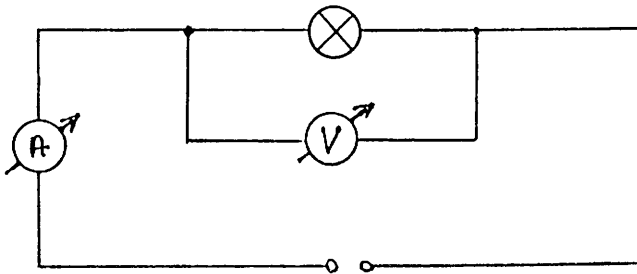
$$I^2 R(T) = \alpha (T - T_0) + f a \sigma (T^4 - T_0^4).$$

Magas hőmérsékleten ($T > 700$ K) a hővezetés a hősugárzáshoz viszonyítva elhanyagolható. [2] Így:

$$I^2 R(T) = f a \sigma (T^4 - T_0^4).$$

A gyakorlat során az izzólámpa szálának méreteit mikroszkóp segítségével határozzuk meg [3], majd a sugárzó felületét kiszámítjuk.

A szál elektromos ellenállását szobahőmérsékleten (T_0) [4] Wheatstone-hidban mérjük meg. Magasabb hőmérsékleten $R(T)$ -t Ohm-törvénye felhasználásával, az alábbi kapcsolást megvalósítva:



2. ábra

Az izzólámpán átfolyó áram erősségét és a feszültségesezt mérve az izzószál T hőmérséklete a következő összefüggésből határozható meg:

$$R(T) = R(T_0)[1 + \beta(T - T_0)] \quad [4]$$

A mért, illetve számított I , $R(T)$, T és f mennyiségek ismeretében σ értéke meghatározható.

A gyakorlatunkon használt izzó:

TUNGSRAM gyártmányú, A 017-84 típusú. (12 V 45 40 W)

A szál temperatura koefficiense: $\beta = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

A sugárzó felület nagysága: $3,88 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$.

Abszorpcióképessége: 0,42.

IRODALOM

- [1] Kohlrausch, F.: Praktische Physik I.
B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1950
- [2] Budó Á.-Mátrai T.: Kísérleti Fizika III.
Tankönyvkiadó, 1977. Budapest
- [3] Fizikai Praktikum (Szerk.: Patkó György)
Tankönyvkiadó, 1986. Budapest
- [4] Budó Á.: Kísérleti Fizika II.
Tankönyvkiadó, 1978. Budapest
- [5] Csengeri P.P.: SI Mennyiségek, mértékegységek, számok
Műszaki Könyvkiadó, 1981. Budapest

KOVÁCH LÁSZLÓNÉ

MESTERSÉGES ÉGITESTEK MOZGÁSÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

ABSTRACT: *In this paper we deal with the movement of space ships, the effect of unexpected events on the orbit of objects moving in the space, and with the determination of orbits. The problems treated here are suggested to discuss in practice lessons at colleges and in study circles at secondary schools.*

Az embert mindig érdekelte a csillagos ég, az égitestek, a világmindenség. A tudósok mérések alapján, tapasztalati uton, illetve elméleti levezetések kapcsán állították fel olyan törvényeket, amelyek alapul szolgálhattak a mai űrkutatás kifejlődéséhez.

Mik is azok az összefüggések, amelyeket a gravitációs kölcsönhatással kapcsolatban már a középiskolában is megismernek a tanulók? Kepler tapasztalati törvényei, Newton általános gravitációs törvénye, a gravitációs erőter jellemzői: térerősség, potenciál, potenciális energia. Ezek ismeretében már az I. és a II. kozmikus sebesség, illetve a szökési sebesség is meghatározható.

Három olyan probléma vizsgálatával szeretnék foglalkozni, amelyek akkor lépnek fel, amikor az űrhajó meteorfelhőbe kerül, vagy meteorral ütközik, illetve pályát valamilyen okból módosítani akarja.

1. Egy 300 km magasan, körpályán repülő műhold meteorfelhőben lefékeződött úgy, hogy sebessége 7 km/s lett. Milyen szög alatt lép be (80 km magasan) a sztratoszférába?

Megoldás:

A keresett szög nem más, mint a műhold sebessége és annak érintő irányú komponense által bezárt szög a sztratoszférába lépés pillanatában. Legyen a műhold sebessége ekkor v , ennek az érintő irányú komponens pedig v_t . Ekkor a keresett szög $\alpha = \arccos v_t/v$. A két sebességérték meghatározásához az energia és az impulzusmomentum (perdület) megmaradását használjuk fel. Az energiamegmaradás törvénye

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - f \frac{mM}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - f \frac{mM}{r}$$

ahol $r_0 = R + 300$ km, $r = R + 80$ km, R , M a Föld sugara, illetve tömege, $v_0 = 7$ km/s a műhold kezdeti sebessége, f a gravitációs állandó. Az impulzusmomentum megmaradás törvénye $m r_0 v_0 = m r v_t$.

A fenti egyenletből az ismert paraméterekkel

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2fM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)} = 7,3 \text{ km/s}$$

$$v_t = \frac{v_0 r_0}{r} = 7,245 \text{ km/s.}$$

A keresett szög: $\alpha = 6,5^\circ$.

2. Egy másik űrhajó ütközik egy meteorral. Milyen következménnyel jár ez az űrhajóra, s milyen változást eredményez a meteor pályájában?

Egy 30 tonnás űrhajó a Föld középpontjától 20 000 km távolságban, e távolságra merőlegesen 6 km/s kezdősebességgel indult. Ellipszispályája kistengelyének végpontjában egy vele szembejövő 10 tonnás, 0,5 km/s sebességű meteorral centrálisan ütközik. Hogyan mozog ezután az űrhajó és a meteor? (Feltesszük, hogy az ütközés rugalmas.)

Megoldás:

Centrális térben történő mozgáskor az energia és az impulzusmomentum mozgásállandó. A Föld gravitációs terében haladó m tömegű, v sebességű űrhajó teljes mechanikai energiája

$$\frac{1}{2} mv^2 - f \frac{Mm}{r} = E \quad (1)$$

impulzusmomentuma:

$$mrv \sin \varphi = N \quad (2)$$

ahol φ az r helyvektor és a v sebességvektor által bezárt szög.

Kezdeti feltételként ismerve a teljes mechanikai energiát és az impulzusmomentumot, (1) és (2) segítségével meghatározható a pálya alakja, a hely és a sebesség minden időpontban. Zárt pálya esetén a Kepler-törvények is közvetlenül adódnak a megoldásból.

A rövidség kedvéért tekintsük ismertnek Kepler I. törvényét, azaz hogy ha $E < 0$, az űrhajó pályája ellipszis (1. ábra). Az (1) és (2) összefüggést csupán az ellipszispálya adatainak meghatározására használjuk fel.

Ha az űrhajó sebessége Földközeli v_{\max} , a legtávolabbi pontban v_{\min} , a teljes energia ebben a két pontban:

$$E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 - f \frac{mM}{a-e} = \frac{1}{2} mv_{\min}^2 - f \frac{mM}{a+e} \quad (3)$$

Mivel a két szélső esetben $v \perp r$, ezekben a pontokban az impulzusmomentum:

$$mrv \sin \varphi = N \rightarrow m(a-e)v_{\max} = m(a+e)v_{\min} \quad (4)$$

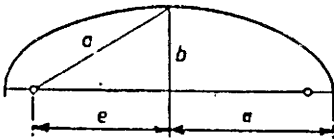
A (3) és (4) egyenleteket v_{\max} -ra megoldva:

$$\frac{1}{2} mv_{\max}^2 = f \frac{mM}{2a} \cdot \frac{a+e}{a-e} \quad (5)$$

amit (3)-ba visszahelyettesítve a teljes mechanikai energia:

$$E = - f \frac{mM}{2a} \quad (6)$$

Ez az egyenlet - azon a felismerésen túl, hogy a teljes mechanikai energia a pálya adatai közül csupán a nagytengelytől függ - az (1) egyenletbe téve fontos összefüggést jelent:



1. ábra

Az indítási pontban $r_0 = 2 \cdot 10^7$ m, $v_0 = 6 \cdot 10^3$ m/s, és így (8) segítségével a félnagy tengely:

$$a = \frac{fMr_0}{2fM - r_0v_0^2} = 10 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (9)$$

Mivel

$$r_0 = a - e \text{ és } e = 8 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (10)$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = 6 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (11)$$

(8) alapján a kistengely végpontjában (ahol $r=a$) az űrhajó sebessége:

$$v_1 = \sqrt{fM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]} = 2 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (12)$$

Az m_1 tömegű űrhajó $v_1 = 2 \cdot 10^3$ m/s sebességgel halad, amikor az m_2 tömegű, $v_2 = -0,5 \cdot 10^3$ m/s meteorral ütközik. Centrális, rugalmas ütközést feltételezve, az ütközés utáni sebességek:

$$u_1 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = 0,75 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (13)$$

$$u_2 = 2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = 3,25 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (14)$$

(Pozitív iránynak az űrhajó ütközés előtti sebességét választottuk.)

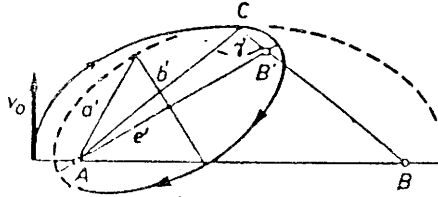
Az űrhajó sebessége - így energiája is - csökken, továbbra is ellipszispályán halad. Az új pálya félnagy tengelye a' , (8) alapján

$$u_1^2 = fM \left[\frac{2}{a'} - \frac{1}{a} \right] \quad (15)$$

ahonnan

$$a' = 5,38 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (16)$$

A sebesség irányának egyenese mindig a pálya érintője. Mivel centrális ütközésnél ezen egyenes iránya nem változik, az eredeti és az új pálya az ütközési pontban közös érintővel rendelkezik (2. ábra). Az érintőszerkesztés szabályai szerint az új ellipszispálya második fókuszja az eredeti ellipszis második fókuszához vezető vezérsugáron van.



2. ábra

Az új pálya e' excentricitásának, b' fél kistengelyének meghatározása - a 2. ábra alapján - egyszerű geometriai feladat. Az ellipszis mértani hely tulajdonságát felhasználva:

$$AC + CB' = 2a' \quad (17)$$

másrészt ismerjük az

$$AC=a, \quad AB'=2e', \quad AB=2e \quad (18)$$

távolságokat. A cosinus tételt alkalmazva az ABC, illetve az AB'C háromszögekre:

$$(2e)^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos \gamma \quad (19)$$

$$(2e')^2 = a^2 + (2a'-a)^2 - 2a(2a'-a) \cos \gamma$$

Innen

$$e' = \left[2e^2 - a^2 \right] \left(\frac{a'}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{a^2}{4} + \left(a' - \frac{a}{2} \right)^2 = 5,12 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (20)$$

Az új pálya fél kistengelye:

$$b' = \sqrt{a'^2 - e'^2} = 1,65 \cdot 10^7 \text{ m} \quad (21)$$

Az új pályán az űrhajó legkisebb távolsága a Föld középpontjától $r_{\min} = a' - e' = 2,6 \cdot 10^6 \text{ m}$ lenne, ami kisebb, mint a Föld sugara. Az űrhajó a Földbe csapódik.

Vizsgáljuk a meteor mozgását! Az ütközés előtt az energiája az (1) összefüggés alapján

$$E_{\text{met.}} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - f \frac{m_2 M}{a} = -3,875 \cdot 10^9 \text{ J} < 0 \quad (22)$$

volt, azaz szintén ellipszispályán keringett a Föld körül.

Ütközés után

$$E'_{\text{met.}} = \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - f \frac{m_2 M}{a} = 1,28 \cdot 10^9 \text{ J} > 0 \quad (23)$$

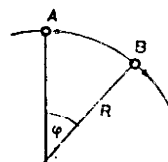
energiával fog rendelkezni; a meteor hiperbolapályájára kerül.

3. Végül állapítsuk meg, hogyan érhet utól pályamódosítással egy űrhajó egy másikat.

Két űrhajó, A és B azonos, R sugarú körpályán halad. Hogyan manőverezzen

a B mögött φ szöggel lemaradt A, hogy pontosan egy körülfordulás után a

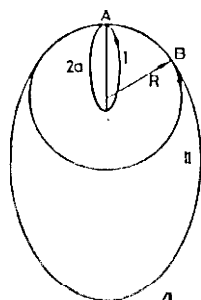
B-vel együtt haladjon? (Lásd a 3. ábrát!)



3. ábra

Megoldás:

A lemaradó űrhajónak csökkenteni kell a sebességét – ezt nevezik asztronautikai paradoxonnak. Ahhoz, hogy az A űrhajó pontosan egy körülfordulás után utolérje a B űrhajót, keringési idejét $\frac{2\pi - \varphi}{2\pi}$ -szeresére kell csökkenteni. Kepler III. törvénye szerint ezt úgy érheti el, hogy a sebességét csökkentve egy



4. ábra

$$a = R \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (24)$$

félnagy tengelyű ellipszispályára áll (4. ábra, I. pálya). Az ellipszispályán keringő űrhajó v pillanatnyi sebessége a következőképpen függ a középponttól mért r távolságtól:

$$v = \sqrt{fM \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]} \quad (25)$$

ahol M a vonzó égitest tömege, f a gravitációs állandó, a a nagytengely fele. A formula megtalálható a Függvénytáblázatban és levezethető a Kepler-törvényekből. A kör és az ellipszispálya adatait behelyettesítve megkapjuk az A űrhajó manőver előtti (v_{A1}) és utáni (v_{A2}) sebességének nagyságát. (Az A űrhajó a manőver előtt a B űrhajóval egyező v_B sebességgel halad.)

$$v_{A1} = \sqrt{f \frac{M}{K}} = v_B$$

$$v_{A2} = \sqrt{f \frac{M}{K} \left[2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} \right]} = v_B \sqrt{2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}}} \quad (26)$$

A-nak, miután utolérte B-t, vissza kell állni a körpályára, vagyis újból v_B sebességre kell gyorsítani. Ez a manőver addig kivitelezhető, ameddig

$$2 - \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} \geq 0 \quad (27)$$

azaz

$$\varphi \leq 2\pi \left[1 - 2^{-\frac{3}{2}} \right] = 4,062 = 232,7^\circ$$

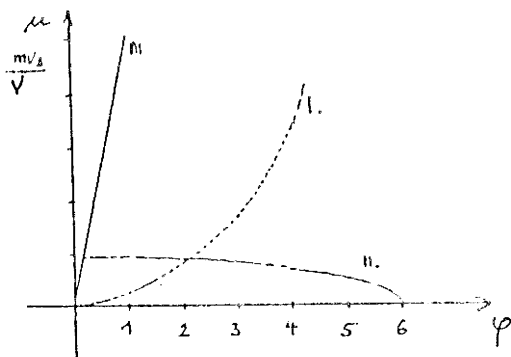
Az A űrhajó ugyanis utolérheti B-t, hogy keringési idejét $\frac{4\pi - \varphi}{2\pi}$ -szeresére növeli. Ilyenkor a találkozásig a B űrhajó több mint egy teljes kört tesz meg (1. ábra, II. pálya). A szükséges új sebességet ugyanúgy számítjuk ki, mint az előző manőver esetén; az eredmény:

$$v_{A2} = v_B \sqrt{2 - \left(2 - \frac{\varphi}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}}} \quad (28)$$

Ez a manőver bármekkora φ esetén végrehajtható. Az űrhajós azt a megoldást választja, amely során kevesebb üzemanyagot kell felhasználni. A v sebességváltozás $\Delta v/mV$ tömegű üzemanyagot igényel (m az űrhajó tömege, V a kiáramló hajtóanyag sebessége).

A szükséges üzemanyag tehát:

$$\mu = 2(m/v) |v_{A2} - v_B| \quad (29)$$



5. ábra

(kétszer kellett sebességet megváltoztatni). Az 5. ábrán φ függvényében ábrázoltuk μ -t (I és II görbék). Látható, hogy $\varphi = 1,8435 = 105,6^\circ$ -ig az első, ennél nagyobb szögek esetén a második manőver a gazdaságosabb.

IRODALOM

- [1] Budó Ágoston - Pócza Jenő: Kisérleti fizika I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [2] Budó Ágoston: Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- [3] Elméleti fizikai példatár I. Szerk.: Nagy Károly Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [4] KOMAL 36. évf. 6.

BÁLINT JÓZSEF

FIZIKAI JELENSÉGEK RENDSZEREZÉSE A MINIMÁL-ELV ALAPJÁN

ABSTRACT: *Fermat's principle induces the intuition according to which the laws of nature show optimal behaviour. In the paper we give examples for the principles of least time, least energy and surface, the least dissipation of energy. Well-known laws are discussed here from a new point of view. We point out that the minimum-principle is as general as the law of the conservation of energy. It is frequently experienced that the interpretation of a phenomenon wants both principles.*

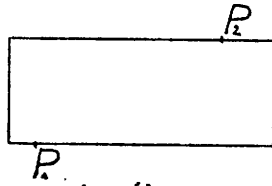
Sok sportágban az eredményesség meghatározása érdekében a métereket és másodperceket mérik. Vegyünk ezek közül kettőt: a 100 m-es síkfutást és az 50 m-es gyorsuszást. Választásunknál szempont volt, hogy elkerülhető legyen a kanyarodás, illetve a visszafordulás. Ennek a későbbiekben jelentősége lesz.

Ezekben a számokban a versenyzőknek kijelölt pályákon kell haladniuk. Ezeket a pályákat szándékosan nem is érdemes elhagyni, hiszen a rajttól a célig a legrövidebb utat jelölik. (Egyébként is diszkvalifikálnák érte!)

Az is természetes, hogy az győz, aki a legrövidebb idő alatt teszi meg az előre kimért utat.

Célunk elérése érdekében ezeket a versenyszámokat módosítjuk úgy, hogy a gondolkodás is szerephez jusson. (Ilyen számok persze a valóságban nincsenek.) A téglalap alakú pályákon a rajt (P_1) és a célpont (P_2) tartóegyenesre nem merőleges az e pontokon átmenő

határvonalakra (1. ábra). A versenyzőket egyenként indítják és az
győz, aki a legrövidebb idő alatt ér célba. Aligha akadna
versenyző, aki

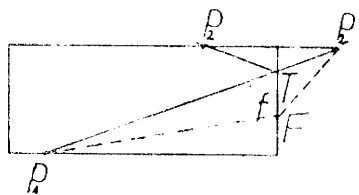


1. ábra

nem a P_1P_2 egyenes szakaszt választaná pályaként. De ezután már valódi nehézséget támasztunk: meg kell közben érinteni az f falat is. A hagyományos geometriai alapismeretek itt már nem igazítanak el teljes mértékben. Addig még könnyű eljutni, hogy két egyenes szakaszból kell a pályát összerakni.

De a döntő kérdés az, hogy az f -en hogyan kell kiválasztani a T töréspontot úgy, hogy a megtett út a legrövidebb legyen?

A jól gondolkodó versenyző tengelyes tükrözéssel meg tudja oldani a feladatot (2. ábra).



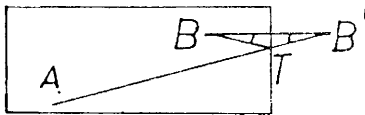
2. ábra

A $P_1TP_2 = P_1TP'_2$ és ezen utóbbi a minimális út P_1 és P_2 között. (A háromszög-egyenlőtlenségből adódóan $P_1F + FP'_2 > P_1P'_2$, ahol F tetszőleges futópont az f -en és $F \neq T$.).

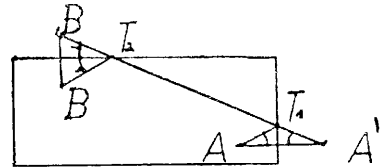
Eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a minimális úthossz akkor adódik, ha az egyenes útszakaszok az f oldallal (illetve annak normálisával) azonos szöget zárnak be.

Könnyű felismerni, hogy ézt az optimumot a természet megvalósítja,a pontszerű test tökéletesen rugalmas ütközése álló falnak esetén, illetve a fényvisszaverődésnél. Ebben a tényben egyfajta "természeti intellektus" nyilvánul meg.

Némi kitérésként utalunk arra, hogy lényegében ugyanazon probléma a minimális úthossz kérdése helyett egészen másként jelenik meg. A billiárdozó játékos egyszerűen el akarja találni az egyik golyóval a másikat egyszeri vagy kétszeri fallal való ütközést közbeiktatva. A probléma lényege (s így megoldása is) u.a. mint előbb, csak itt a szögek egyenlősége a kiinduló követelmény. (3.1 és 3.2 ábrák).

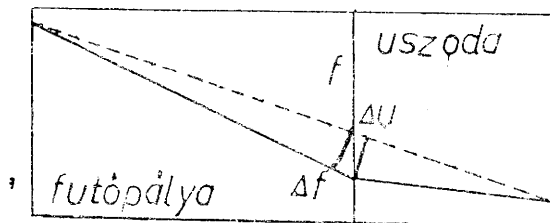


3.1 ábra



3.2 ábra

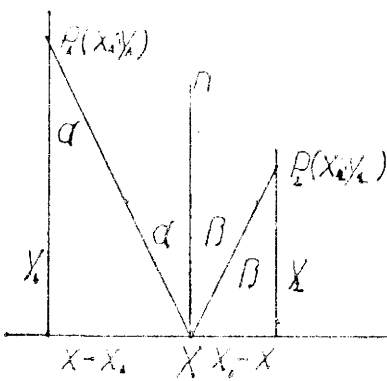
Folytatjuk az eredeti két sportág vizsgálatát, de úgy, hogy összekapcsoljuk azokat: olyan kéttusa pályát csinálunk, hogy a síkfutást kövesse az uszás. Ha "szemben van" a rajt és célhely, akkor a feladat megoldása triviális. Egészen más a helyzet egyébként (4. ábra). Az ösztönösen is megérezhető, hogy nem a legrövidebb út lesz az optimális. A T pont különböző megválasztásával nemcsak az út hossza, hanem ezen belül a futó- és



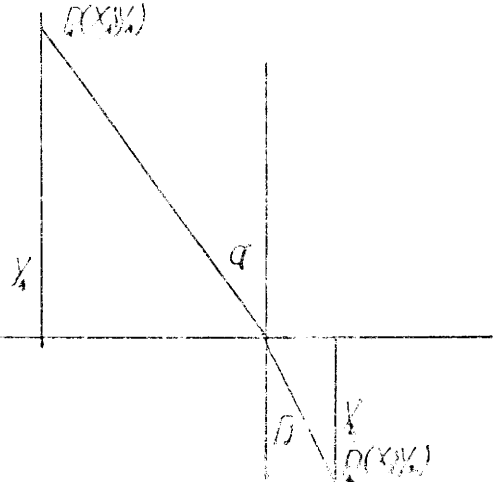
4. ábra

úszótávolság is változik. A viszonylag jó futó szívesen fut többet is (egy határig), mint amennyivel csökken az úszótávolság. Ez a követelmény azonban az f -re merőleges, P_1 -en és P_2 -n áthaladó egyenesekkel kimetszett szakasz belső pontjaiban mindenütt teljesül. Az ábrán felvett T pontra vonatkoztatva bejelöltük a Δf útnövekedést az egyik oldalon és a Δu csökkenést a másikon. Ezzel biztosan "jól járna" a versenyző, hiszen a két szakasz aránya $\approx 2:1$, de ennél jóval nagyobb a megfelelő sebességek aránya. Melyik lesz az optimális T választás?

A probléma "hasonlít" a fénytöréshez. Bízhatunk is a természetben, hogy "optimálisan oldotta meg" ezt is. A következőkben belátjuk, hogy pontosan így van. Tanulságos lesz a fénytörést és fényvisszaverődést ilyen szempontból azonos eszközökkel, paralel vizsgálni (5.1 és 5.2 ábrák).



5.1 ábra



5.2 ábra

Fényvisszaverődés:

$$t = \frac{P_1 T + TP_2}{c_1} = \frac{1}{c_1} \left[\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2} \right]$$

A t -nek szélső értéke - a jelen esetben nyilván minimuma - ott van, ahol a $\frac{dt}{dx}$ derivált értéke zérus.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \left[\frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2 + y_1^2]^{1/2}} - \frac{x_2-x}{[(x_2-x)^2 + y_2^2]^{1/2}} \right] = 0 \quad (+)$$

$$\begin{array}{ccc} \sin \alpha & & \sin \beta \\ \sin \alpha = \sin \beta & & \\ \alpha = \beta & & \end{array}$$

Fénytörés: Felhasználjuk az előbbi eredményünket

(+)

$$t = \frac{P_1 T}{c_1} + \frac{TP_2}{c_2} = \frac{1}{c_1} P_1 T + \frac{1}{c_2} TP_2$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \sin \alpha - \frac{1}{c_2} \sin \beta = 0$$

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2} \quad \text{átrendezve}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{ez pedig éppen a fénytörés törvénye.}$$

A fény terjedésének sugároptikai törvényeit Fermat elve foglalja magában, amely a fény P_1 pontból a P_2 pontba - megadott feltételek - pl.: visszaverődések és törések - mellett eljut, szélsőérték (minimum), ezért az elvet "a legrövidebb idő elvének" is hívjuk. Az tehát csak látszat lehetett (ha volt), hogy a fénytörésnél a fény (a természet) feleslegesen "cifrázza" a dolgot. Ellenkezőleg: az idő vonatkozásában optimálisan "oldotta meg" a feladatot. Felmerül a kérdés: jellemző-e ez általánosabban is? Joggal tételezhetjük-e fel a természetről, hogy valamilyen szempontból minden folyamatnál a szélsőérték, többnyire a minimum elérésére törekszik, illetve azt éri el? A kérdésre egzakt válasz nem adható. A világról alkotott képünk, a világnézeti modellünk vagy elfogadja, vagy vitatja, vagy elutasítja az ún. minimum-elvet. Itt most nem akarunk állást foglalni egyik vagy

másik mellett, inkább faggatjuk még egy kicsit a természetet.

A felület energia: A 6. ábrán vázolt összeállításban a mozgatható huzalt Δs -el elmozdítva $F \cdot \Delta s$ munkát végzünk. A terhelést csökkentve a folyadékhártya a súlyt felrántja.



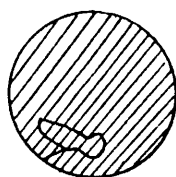
6. ábra

Ez azt jelenti, hogy a folyadék határfelülete mentén energiával rendelkezik. A felületi energia a folyadék határfelületének kialakításából származó energia. A felületi energia megváltozása:

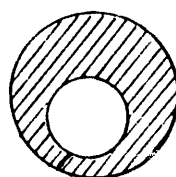
$$\Delta E_f = F \cdot \Delta s = \alpha \cdot 2l \cdot \Delta s = \alpha \cdot \Delta A$$

Ezen eredmény alapján α -nak egy lehetséges, szemléletes jelentést adhatunk: a felületi feszültség számértékben a folyadékfelület egységnyi területtel való növeléséhez szükséges munka. A felületi energia annál kisebb, minél kisebb a felület. Mivel stabilis egyensúlyi helyzetben a potenciális energia minimális: ezért adott körülmények között a folyadék felszíne a lehető legkisebb.

(Emlékeztetőül, pl.: L. a 7.1 és 7.2 ábrákat)



7.1 ábra



7.2 ábra

M.1.: A súlytalanság állapotában lévő folyadék adott térfogata mellett a lehető legkisebb felületű alakot vesz fel, a gömb alakút. Szappanoldatba merített és onnan kivett drótvázakon olyan felületek alakulnak ki, hogy a vázra illeszkedő felület a lehető legkisebb legyen. Ezek az ún. minimálfelületek.

M.2.: Az előző pontbeli példa mindkét szélsőértékkel megfogalmazható. A súlytalanság állapotában lévő folyadékra az jellemző, hogy adott térfogatú részt minimális felülettel zár körül, illetve adott felülettel maximális térfogatú folyadékot zár be.

M.3.: Mivel hasonló térbeli alakzatok esetén a felület négyzetesen, a térfogat, s vele együtt a tömeg és a súly köbösen változik; a hányados a méretek csökkenésével egyre kisebb lesz. Egy parányi test egyre inkább felületi képződmény: egyre inkább dominálnak a felületi jelenségek. Ilyen pl.: ún. porlasztott folyadék. Így (is) magyarázható, hogy ezek egyre tökéletesebben megközelítik a gömb alakot.

Az előzőekben már esett szó arról, hogy stabil egyensúlyi helyzetben a potenciális energia minimális. Most tágabb értelemben szólunk az energia minimumáról, illetve az erre való törekvésről.

1. példa: Megkeressük a párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon keletkező Joule-hő szélsőértékének feltételét. (8. ábra jelöléseivel).

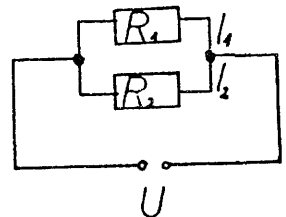
$$P = I^2 R$$

$$P_{\text{összes}} = P_0 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$$

$$\text{mivel } I_1 + I_2 = I \quad I_2 = I - I_1$$

$$P_0 = I_1^2 R_1 + I^2 R_2 - 2II_1 R_2 + I_1^2 R_2$$

Keressük P_0 minimumát!



8. ábra

$$P'_0(I_1) = \frac{dP_0}{dI_1} = 2 I_1 R_1 + 0 - 2 I R_2 + 2 I_1 R_2 = 0$$

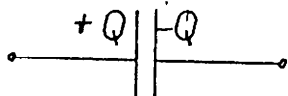
Visszahelyettesítés után:

$$P'_0 = I_1 R_1 - I_1 R_2 - I_2 R_2 + I_1 R_2 = 0$$

$$\underline{I_1 R_1 = I_2 R_2}$$

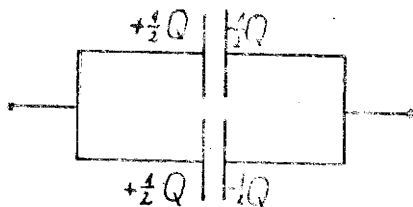
Ez viszont $U_1 = U_2$ fennállását feltételezi, ami köztudottan igaz. Arra jutottunk tehát, hogy A pontból a B pontba az I erősségű áram úgy jut el, hogy a Joule-hő minimális.

2. példa: Egyszerűség kedvéért két egyenlő, (C) kapacitású kondenzátor közül az egyiket feltöltjük, majd párhuzamosan kapcsoljuk vele a másikat. Vizsgáljuk meg az energia változását (9.1 és 9.2 ábrák).



9.1 ábra

$$E_1 = \frac{1}{2C} Q^2$$



9.2 ábra

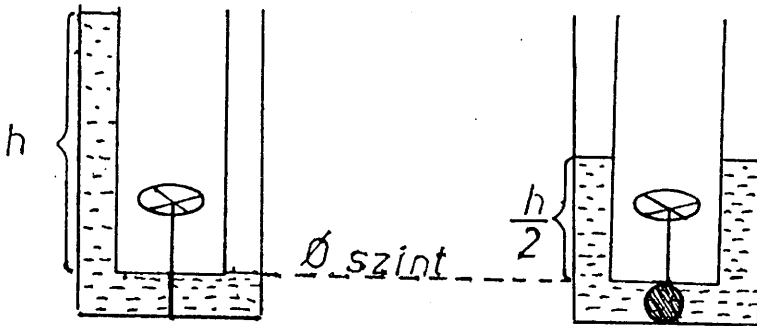
$$E_2 = 2 \left[\frac{1}{2C} \left(\frac{Q}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{4C} Q^2$$

Vagyis $E_1 = 2E_2$. Nem könnyű ráatalálni, hogy hová lehetett az E_1 energia fele? Első pillanatban még azt is gondolhatnánk, hogy meg kellett volna maradnia E_1 -nek, hiszen a rendszer energetikailag zártnak tűnik.

Ha viszont "hiszünk" a minimálevelvben, akkor eleve úgy tekintünk erre az eseményre, hogy az energiának csökkenie kell, mert a természet különben "nem tartotta volna indokoltnak" a töltés felének átáramlását. Kiemeljük, hogy ez a világnézeti koncepció

szakmai munkánkknak irányt szab: keresni kell a veszteség forrását. A világnézet tehát nemcsak valami más az ismereteinken, hanem serkentője is az ismeretszerzésnek.

Analóg modellként nézzünk egy közlekedőedényt (10.1 és 10.2 ábrák).



10.1 ábra

10.2 ábra

$$E_1 = g \cdot \left(m \cdot \frac{h}{2}\right)$$

$$E_2 = g \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left(m \cdot \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} E_1$$

vagyis $E_1 = 2 E_2$.

Itt már nyomon követhető az energia "eltűnésének" folyamata. Így ráirányul figyelmünk a kondenzátorok esetén is a rendszer ohmos ellenállására, majd a Joule-hőre, valamint a két állapot közötti folyamatra: az egyre csillapodó rezgésre. Ezen jelenség energetikai vonatkozásban az elektromos példában összetettebb: elektromágneses hullámok is keletkeznek, ezzel mintegy megkönnyítve a "felesleges energiától" való megszabadulást.

IRODALOM

- [1] Dr. Budó Ágoston - Dr. Mátrai Tibor: Kísérleti Fizika III.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [2] Holics László (szerk.): Fizika
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [3] Bálint József - Berkes József: Világnézeti kérdések a
fizikában
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

VIDA JÓZSEF

MODELLEK A MOLEKULAFIZIKÁBAN

ABSTRACT: *During teaching physics we can scrutinize complicated systems or processes by means of models. In this dissertation we scrutinize over an example how models are born. We would like to work out such molecule models for the analysis of the absorption spectra of diatomic gases which could be faithful images reflected by mirror for diatomic gas molecules. We will scrutinize how far classical mechanical models are applicable to quantum mechanical movements, where the limit is which must not be surpassed with forcing pictorialism in order to avoid hindering the creation of adequate models.*

A Természettudományi Lexikon szerint a fizikai modell "bonyolult fizikai rendszerek egyszerűsített, gyakorlatilag megvalósított, vagy szemléletesen elképzelt, matematikailag szabatosan leírható, idealizált mása, amely többé-kevésbé helyesen szemlélteti a vizsgált rendszer vagy folyamat fizikai sajátosságait".

A modell megalkotásához meg kell vizsgálnunk, hogy a kérdéses objektum mely más ismert rendszerhez hasonló, és akkor a rendszer megismert tulajdonságai alapján vonunk le következtetéseket az eredeti rendszer tulajdonságaira. Tehát a konkrét probléma megoldása helyett, valamely más feladat

ismert megoldását végezzük el (esetleg kis változtatásokat teszünk).

Érdemes a legegyszerűbb fizikai modellből kiindulni, olyanból, amelyben a kis jelentőségű tényezőket elhanyagoljuk és a lassan változó tényezőket állandónak tekintjük. Általában minél egyszerűbb a modell, annál könnyebben vizsgálható, viszont annál kevésbé pontos (annál pontatlanabbul tükrözi az eredeti rendszer sajátosságait).

Ha megtörtént a modell kiválasztása, akkor ki kell dolgoznunk egy olyan matematikai apparátust, amely a kísérletileg megfigyelhető eredményeket adja. A modelleknek ugyanis ezekről számot kell adni! Mivel a kísérleti eredmények általánosításával nyert tapasztalati törvények sem abszolút pontosak, így a modellre megállapított összefüggésektől sem várhatjuk el, hogy abszolút pontos törvényként szolgáljon a modellezettre.

Gyakran egy rendszer leírására több egyszerű modellt hozunk létre, hogy a rendszer egyes tulajdonságainak a modellek szerinti osztályozásával biztosítsuk a jelenségek egyszerű leírását. Ezek a modellek nemcsak különböznek egymástól, de legtöbbször egymásnak ellentmondóak is (pl.: atommag-modellek).

A következőkben vizsgáljuk meg egy konkrét példán - a probléma felvetődésétől a megoldásig - a modell születését. Ehhez válasszuk ki egy viszonylag egyszerűnek tűnő fizikai rendszert, a kétatomos molekulát!

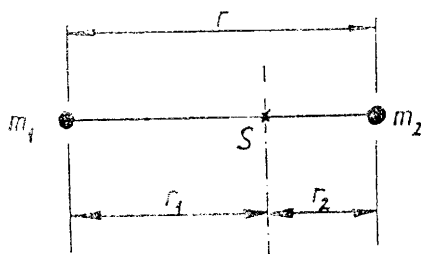
Kétatomos gázok abszorpciós színekének vizsgálatánál azt tapasztalták, hogy a távoli és a közeli infravörös tartományban, a gáz minőségétől függő, jellegzetes színekpvonalak jelennek meg.

A színeképlet keletkezésének elmélete ekkor már ismert. Abszorpciós színeképeket úgy kapunk, hogy a gázon folytonos (minden hullámhosszat tartalmazó) infravörös fényt bocsátunk keresztül; a színeképben (spektrumban) ilyenkor sötét vonalak jelennek meg. Ezek az ún. elnyelési vagy abszorpciós spektrumvonalak és azt jelzik, hogy az infravörös sugárzás milyen hullámhosszakon (frekvenciákon) gerjesztette a gázt (ugyanis, ahol nincs elnyelés, ott a fény átmegy a gázon). Mivel a gáz - vizsgált tartományon belüli - hőmérsékletnövekedéssel járó gerjesztése nem ad spektrumvonalat, az atom elektronjainak ismert gerjesztéséhez pedig jóval nagyobb energiák kellenek, arra lehetett következtetni, hogy a gázmolekulák valamilyen belső mozgásállapotváltozásához szükséges a besugárzáskor elnyelt energia.

Ismerve a kétatomos molekula konfigurációját (térbeli geometriai felépítését), a molekula belső mozgását megfeleltetjük a makroszkópikus forgásnak és rezgésnek és azt vizsgáljuk, hogy az elnyelt infravörös fény hatására a forgási és rezgési állapotváltozások létrejöhetnek-e? De közben ne feledjük, hogy a valóságos mikrofizikai jelenség helyett egy tökéletlen és furcsa makrovilágbeli elemekből épült modellt szemlélünk, azaz az egzakt elmélet megállapításait nem szabad figyelmen kívül hagynunk. Kiderítjük, milyen fajta színeképlet várhatunk a kvantummechanika alapján egy ilyen forgó vagy rezgő rendszer esetén, és összehasonlítjuk azt az észlelt infravörös színeképpel.

Le kell tehát "írni" a modell működését, és a modell mozgásával kapcsolatos számítási eredményeket össze kell vetni a tapasztalattal.

A forgó molekula egyszerű mechanikai modellje a súlyzómodell (1. ábra.).



1. ábra

A két pontszerűnek tekintett atom egymástól (r) távolságban a súlytalan, merev rúd két végén helyezkedik el. (Itt elhanyagoltuk az atomok kiterjedését és azt, hogy az atomok a valóságban nem mereven kapcsolódnak egymáshoz.) A térben a molekulamodell a tömegközépponton átmenő és az összekötőrúdra merőleges szabadtengely körül foroghat adott szögsebességgel.

Következő feladat a modell mozgásával kapcsolatos összefüggések összegyűjtése, a számítások elvégzése.

A forgási energiát kifejezhetjük a tehetetlenségi nyomaték (I) és a perdület (N) (impulzusmomentum) segítségével:

$$E_f = \frac{N^2}{2I} \quad (1)$$

A ν_f forgási frekvenciát a szögsebesség az alábbiak szerint határozza meg:

$$\nu_f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2)$$

A tömegközépponton átmenő, adott irányú tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékat pedig az

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (3)$$

képlet alapján számíthatjuk.

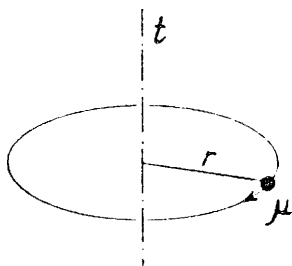
Ez átalakítva a következő alakú:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \quad (4)$$

Látható, hogy (I) megegyezik egy

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

tömegű tömegpont tehetetlenségi nyomatékával, ha az a forgástengelytől (r) távolságra helyezkedik el. A μ -t a molekula redukált tömegének nevezzük. A szemléletes súlyzómodell helyett találtunk egy kevésbé szemléletes, (az elképzelt molekulához nem annyira hasonló) de egyszerűbb, könnyebben kezelhető modellt, amelynek neve: merev rotátor. (2. ábra).



2. ábra.

A merev rúd a μ tömegponttal a (t) tengely körül forgó mozgást végez. A (t) tengelyre vonatkozó perdület a klasszikus mechanikában csak a szögsebességtől függ. így, mivel a szögsebessége folyamatosan változhat, a modell nem működőképes, azaz a tapasztalati eredményeket nem szolgáltatja. Nevezetesen: tetszőleges lehet forgási energiája, s ez a vonalas színekép létrejöttével ellentétben van.

Az előrehaladás érdekében el kell szakadni a megfogható valóságtól. A kvantummechanikai számításokat hívjuk segítségül, amelyek szerint a molekula impulzusmomentuma diszkrét (csak adott értékeket vehet fel). Ezt az ismert Schrödinger-egyenlet megoldásával kapjuk:

$$N = \frac{h}{2\pi} \sqrt{J(J+1)} \quad (6)$$

A (J) rotációs kvantumszám értéke 0,1,2,..... stb. egész szám lehet, amivel a lehetséges forgási energiák az

$$E_f = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1) \quad (7)$$

képlet szerint határozhatók meg, ahol (h) a Planck-állandó.

Ennek alapján a rotátor csak adott szögsebességekkel foroghat, mely szögsebességek meghatározzák forgási energiaértékeit. Egyik energiaszintről egy másikba pedig csak úgy juthat el a rotátor, ha a két szint közti energiakülönbséget egy adagban veszi fel, illetve adja le (az átmenet kvantált). Az így működő merev rotátorra elvégzett számítások igen közeli eredményeket adnak a kísérleti tapasztalatokkal.

A rotációs molekulaszínekép a távoli infravörös tartományban (25-500 μm) jelentkezik. A színeképvonalak vizsgálata fontos molekulafizikai állandók meghatározását teszi lehetővé. Így többek között a mérési adatok és a (7) képlet segítségével a molekula tehetetlenségi momentumát, abból pedig az atomok közötti távolságot (magtávolság) lehet kiszámítani.

A kétatomos molekulák másik belső mozgását a rezgőmozgással (vibráció) helyettesítjük (modellezzük). Ezt úgy kell elképzelni, hogy a molekulában az atomok egyensúlyi helyzetük körül végeznek rezgéseket (a két atom vagy közelit

vagy távolodik egymáshoz képest, miközben a molekula tömegközéppontja helyben marad). A molekula mechanikai kivitelezése: az atomokat jelképező két tömegpont közé egy rúgót helyezünk. Rezgéseket végeztetve az így elkészített rendszerrel, az kis amplitudók esetén - mikoris a kitérés az időnek szinuszos függvénye - harmonikus rezgőmozgást végez. A két tömegpont fenti mozgása redukálható egyetlen tömegpont egyensúlyi helyzete körüli harmonikus rezgésére, ha bevezetjük a forgómozgásnál már megismert (5) redukált tömeget. Az így előállt modell neve: harmonikus oszcillátor. Az oszcillátor frekvenciáját a mechanikából jól ismert képlet segítségével számíthatjuk:

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\mu}} \quad (8)$$

ahol (D) az erőállandó, (μ) a redukált tömeg. Érdemes megjegyezni: amíg a rotátornál a klasszikus mechanikai elmélet szerint minden rotációs frekvenciaérték előfordulhatott (2), itt még a klasszikus elmélet is csupán egyetlen frekvenciát enged meg, amelynek nagysága a két tömegpont tömegétől és a rúgó erőállandójától függ. A valóságban - a kvantummechanikai számításokkal egybeesően - az oszcillátor energiája diszkrét értékeket vehet fel, amelyeket az alábbi összefüggés alapján számíthatunk:

$$E_r = h \nu_r \left[v + \frac{1}{2} \right] \quad (9)$$

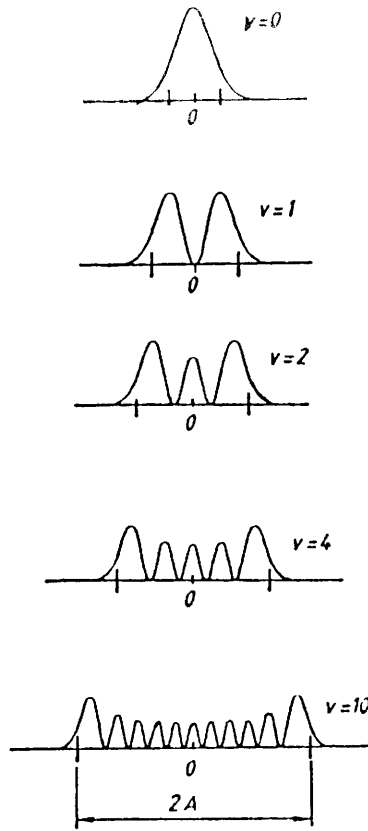
Itt (v) a rezgési kvantumszám, amelynek értéke 0,1,2,3...stb. egész szám lehet, a (ν_r) pedig a (8) alatt meghatározott klasszikus frekvencia.

A vibrációs molekulaszínkép a közeli infravörös tartományban (2-25 μm) jelentkezik. Elemzésével, ha ismerjük az alkotó atomok tömegeit, meghatározható a molekula erőállandója.

A merev rotátorral és harmonikus oszcillátorral történő számítások jól megközelítették a mérési eredményeket, de nem egyeztek meg azokkal teljesen. Ahhoz, hogy pontosabb értékeket kapjunk tovább kell fejlesztenünk modelljeinket (vagy más modellek létrehozásával próbálkozunk). Így jött létre a nem merev rotátor és az anharmonikus oszcillátor, amelyek felépítésükben és működésükben még a klasszikus mechanikai elvekre épülnek és nagy pontossággal "adják" a tapasztalati eredményeket (ezek részletes tárgyalására itt nem térünk ki).

A molekula kvantummechanikai vizsgálatát a rotátor és az oszcillátor már nem teszi lehetővé. Az egész klasszikus fizika összes fogalma a gyakorlati életben is szerepel, így azok megértéséhez segítségül jönnek az alapvető szemléleti képek. Ebbe a képbe nem illeszthető be a kvantummechanikai mozgásforma, mert a megértést nem segíthetjük érzéki benyomásokra való hivatkozással.

A kvantummechanikai "rezgés" esetén a tömegpont nem a fordulópont környezetében mozog a "leglassabban", azaz nem ott található meg a legvalószínűbben, mint ahogyan az a klasszikus esetben érvényesült. Nagy kvantumszámok esetén is csak közelít a klasszikus mechanikai modellhez.

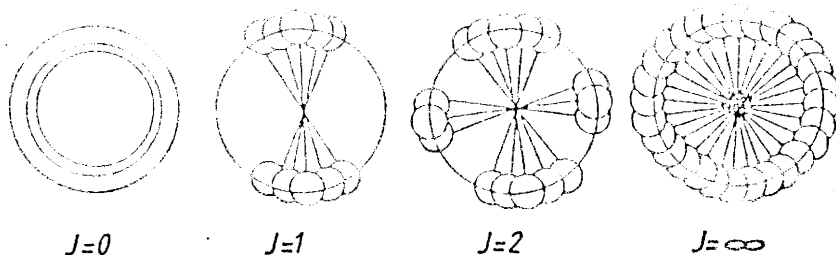


3. ábra

(3. ábra: az abszcisszán a magtávolságnak az egyensúlyi helyzettől (0) való eltérését, az ordinátán a rezgő részecske előfordulásának valószínűségét adtuk meg különböző rezgési kvantumállapotban; A -val az amplitudót jelöltük.)

A kvantummechanikai "forgó" mozgás is lényegesen különbözik a klasszikustól: a rotációs frekvenciának nincsen egészen meghatározott jelentése. A $J = 0$ forgásmentes állapot azt jelenti, hogy a részecske egyenlő valószínűséggel található a gömbi pálya minden pontján. Nullától eltérő kvantumszámú

állapotok esetében jellemző mintázatot alakítanak ki a duzzadóhelyek (ahol "lassu" a forgás) és ritkulások (ahol a keringés "gyors") (4. ábra).



4. ábra

Nagyon magas kvantumszámok esetén közelít csak a jelenség a klasszikus mechanikai rotátor mozgásához.

Miért mondjuk mégis, hogy a "forgó molekula", a "rezgő molekula", ha az igazi mozgás teljesen más jellegű? Mert ha egy valóságos atomtömegekkel rendelkező, meghatározott erőállandójú rugóval molekulaméretű objektumot tudnánk készíteni, azt forgásra és rezgésre készítenénk, úgy forgási és rezgési energiái egybeesnének a molekula-színképből meghatározott rotációs, vibrációs energiákkal. Ez a kép hétköznapi szemléletünk alkotása, amely csak a megszokottat tudja elképzelni, a szokatlant nem.

A molekula kvantummechanikai vizsgálatához újszerű megközelítésre van szükség, mert a mikrovilágról nem tudunk képet festeni, azaz nem készíthetünk olyan modellt, amelyik érzékszervi tapasztalásunk számára hozzáférhető volna.

A mikrofizika törvényeinek megértését éppen a képszerűség erőszakolása nehezíti, mivel nagyfokú képzelőerőt igényel az, hogy hogyan viselkedik egy mikro-objektum, ami semmi addig látotthoz nem hasonlítható. Pedig a mikrovilág

semmivel sem abszurdabb a környező világnál, csupán csak másabb. Ennek a másabb világnak a megismeréséhez már a kvantummechanikai modelleken át vezet az út.

AJÁNLOTT IRODALOM

- [1] Fényes Imre: A fizika eredete
Kossuth Könyvkiadó 1980.
- [2] Gitterman, M., Halpern, V.: Fizikai problémák kvalitatív elemzése
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1985.
- [3] Herzberg, G.: Molekula-színképek és molekulaszervezetek I
Akadémiai Kiadó, Bp. 1956.
- [4] Károlyházy Frigyes: Igaz varázslat
Gondolat, Bp. 1976.
- [5] Liszi I., Ruff I., Schiller R., Varsányi Gy.: Bevezetés a fizikai kémiába
Műszaki Könyvkiadó, Bp. 1983.
- [6] Szűcs Ervin: Technika és rendszer (egyetemi jegyzet)
Tankönyvkiadó, Bp. 1985.

HIDASI KÁROLY

KÖTELEZŐ TANULMÁNYI UTAK SZERVEZÉSE FŐISKOLAI HALLGATÓK SZÁMÁRA

ABSTRACT: *The author gives a short making known on the organizational tasks of school-excursions. He writes on the role of lecturers leading school-excursions and that of students for the sake of the cause. Finally he makes known two programmes prepared for Soviet and Polish students.*

I. BEVEZETÉS

Az általános iskolai tanárképzés sokrétű nevelési feladatai között gondoskodnunk kell arról is, hogy a jövőendő általános iskolai tanárok megismerkedjenek a nevelés egyéb feladataival is. Az iskolai oktató-nevelő munkán túl több tanári feladattal kell hallgatóinknak megismerkedni. Ezek jórészével nem a szaktanszékek foglalkoznak. Elméleti ismereteket a neveléssel kapcsolatban a pedagógiai szaktárgyi oktatásban kapnak.

Az elmélet és gyakorlat közötti különbséget hidalja át a szaktanszékek szakmódszertani ismereteinek elsajátítása. Ezek sokrétűségéről ebben a cikkben részletes ismertetést nem kívánok adni. Egyetlenegy témára szeretnék - de nem a teljességre törekedve - ismertető elemzést végezni.

Az osztályfőnöki tevékenység egyik feladata, hogy tanulóit a tanítás során tanulmányi utakra is elvigye. A mai társadalmunkban ezek a tanulmányi utak igen változatosak és egyre bonyolultabb

feladatokat követelnek a szervező tanártól.

A mi hallgatóinkat erre a feladatokra a tanszék valamennyi oktatója igyekszik nevelni. A tanszék által szervezett tanulmányi utak előkészítésébe, lebonyolításába aktívan bevonjuk hallgatóinkat.

Ebben a cikkben röviden arról adok számot, hogy tanszékünkön hogyan és hányféle tanulmányi utat szervezünk. Természetes, hogy ebben a munkában az oktatók mindegyike külön-külön is részt vesz. A felsőoktatásban eltöltött 30 év alatt több tanulmányi utat vezettem, s ezért vállalkoztam e téma feldolgozására.

II. TANULMÁNYI UTAK SZERVEZÉSE

A felsőoktatási tanterv előírja, hogy a matematika-fizika, fizika-technika szakos hallgatók az első- és harmadik évfolyamon kötelező tanulmányi uton vegyenek részt. Ennek időtartama öt-öt nap. Hosszú ideig a tanulmányi utakat belföldön szerveztük meg. Az első évfolyamok számára elsősorban mechanikai műveleteket demonstráló üzemekbe vittük a hallgatóinkat. Ilyen például az ózdi, a diósgyőri, borsodnádasdi, a miskolci hűtőház, stb. megtekintése. Természetesen ilyen üzemlátogatást Budapesten és környékén, vagy dunántúli vidékünkön is szerveztünk. A harmadévfolyamok számára már a harmad, negyed évfolyam tananyagához (elektromos, fénytan, atomfizika) kapcsolódó üzemeket (Egyesült Izzó, Kábelművek, Orion, Videoton, Remix, Optikai Művek, Vilati, KFKI, stb.) látogatunk meg. A harmadévesek számára minden évben szakmódszertani kirándulást szerveztünk. Ezek időtartama egy nap.

Tanszékünkéről a kezdeti időkben egyéni szervezéssel beindítottuk a külföldi tanulmányi utakat is. Később a Minisztérium engedélyével ezek az utak hivatalosak lettek. Kialakult a külföldi főiskolákkal - elsősorban szocialista országokkal - a hallgatói cseregyakorlat.

A tanulmányi utaknak a megszervezése és a külföldi hallgatók magyarországi programjuknak az összeállítása és biztosítása a tanszék feladata volt.

Tanszékünk hallgatói tanulmányi cseregyakorlaton az alábbi országokban jártak:

- Német Demokratikus Köztársaság (Erfurt)
- Szovjetunió (Csebokszári, Vlagyimir)
- Csehszlovákia (Bánska Bystrica)
- Lengyelország (Zielona Góra)

Összegezve a tanulmányi utak lehetőségeit a következő típusúakat szerveztem:

1. Belföldi 5 napos programmal
2. Belföldi 10 napos programmal, de ez csak külföldi hallgatók számára
3. Külföldi 10 napos programmal
4. Külföldi 21 napos programmal (ez csak a csebokszári utak, mivel az utazás 6 napot vett igénybe).

A szervezési feladatokat nem részletezem külön-külön, mivel a munka menete nem tesz különbséget a magyar, vagy külföldi résztvevők között. Az üzemek látogatásának, a hallgatók étkeztetésének és kulturális programjának összeállítása azonos. A különbség a napok számában és a költségek tervezésében tér el.

Ezek után vizsgáljuk meg a tanulmányi utak szervezésével és lebonyolításával kapcsolatos feladatokat.

1. A tanulmányi kirándulásért felelős tanár feladatai.
2. A résztvevő hallgatók feladatai.
3. A tanulmányi ut lebonyolítása.
4. Befejező feladatok tanár és hallgató számára.

1. Tanulmányi kirándulásért felelős tanár feladatai

Mielőtt részletezném a feladatokat, meg kell jegyezni, hogy a tanárok száma és esetleges más kísérők (pl.: testvér, vőlegény, menyasszony, kisegítő tanár, gépkocsivezető, stb.) esetében is minden alkalommal egyszemélyi felelősséggel egy tanárt jelölünk ki a szervezésre. Az elmúlt 30 évben, amikor a szervező munka az én feladatomban volt, ha csak tehettem egyedül mentem.

a. A tanulmányi út kijelölése:

A főiskolai hallgatók már régóta önállóak, s ezért ebbe munkába aktívan kikérem segítségüket. Szerencsés eset az, ha a célt rögtön ki tudjuk jelölni. Pl.: Borsod megye, Sopron és környéke, Budapest-Székesfehérvár-Dunaujváros, stb.

Nem szerencsés, de a demokratikus elv segít, hogy ha az évfolyam hallgatóinak véleménye megoszlik és több útvonalra is óhajtott menni, ekkor titkos szavazás történik. A döntés után semmiféle vitának nem adok helyt.

b. A tanulmányi út programjának megtervezése:

A tervezés gondolata három részre tagozódik:

- Az üzemek, vállalatok kijelölése.
- A kulturális intézmények (múzeumok, színház, stb.) látogatásának terve.
- A szabadidő hasznos eltöltésének megszervezése.

A program elkészítése előtt szükséges a főiskola illetékes vezetőivel egyezkedni a közlekedés lehetőségében. Feltehető, ha időben történik a szervezés, akkor már szeptemberben a főiskolai autóbust meg tudjuk rendelni, s így az üzemek, múzeumok és szabadidő programok beiktatása könnyebb és egyszerűbb.

c. Egyéb szervezési feladatok:

- A közlekedés biztosítása. Ez lehet autóbusz (saját, vagy külön), vagy vonat. Mindkét esetben a szükséges iratok beszerzése. Itt külön megjegyezném, hogy amennyiben külföldre történik a tanulmányi kirándulás szervezése, akkor figyelmet kell arra is fordítani, hogy a hallgatók a nemzetközi igazolványokat és egyéb iratokat egyénileg megszerezzék.
- Az üzemek megtekintésének engedélyeztetése. Külön kérni kell az üzemi kísért. Nagy létszám esetén akár két kísért is lehet kérni.
- Az elszállásolás biztosítása. Ezt a legjobb állami szervezeten keresztül kérni. Ez valamivel költségesebb, de biztosabb mint privát szobák biztosítása.
- Étkeztetés biztosítása. Ez történhet az üzemi étkezdében, de lehetséges étteremben is. Föltétlenül ügyelni kell arra, hogy a hallgatók minden nap legalább egyszer meleg ételt kapjanak. A reggelit és vacsorát egyénileg kell megoldani, költségkimelés céljából.
- Gyógyszer, kötszer biztosítása.
- Ha autóbusszal történik az utaztatás, akkor az autóbusz vezetője részére biztosítani kell a külön szállást (ezt rendelet írja elő), és udvariasságból a közös étkezésekre is meg kell hívni.

d. A költségvetés elkészítése:

A tervezésnél előzetes felmérés alapján meg kell tudni, hogy a tanulmányi csoport mennyi állami támogatást kap, illetve mennyi segítyt tud összegyűjteni. Tehát a külső helyről beérkező összegek ismerete alapvetően fontos.

A csoport teljes költségvetését el kell készíteni (ezt nem részletezem).

Ha külföldi hallgatók számára szervezünk tanulmányi utat, akkor a költségvetés szokásos tételei közé be kell iktatni az alábbi kiadásokat is:

- A hallgatók kötelező napirendje.
- A kísérő tanárok kötelező napi díja.
- A tanszéki fogadás költségei.
- A közös ismerkedési est költségei.
- A helyi és a külföldi ajándékok költségei.
- Egy közös valutaalap biztosításának költsége.

2. A hallgatók feladatai.

- a. A költségvetés egyenlő elosztása alapján a költségek összegyűjtése.

Nagyon fontos, hogy a költségek elosztásánál a kísérő tanár is egyenlő arányban részesedjék a költségekből.

- b. A tanulmányi út felelőseinek kijelölése:

- Kirándulás szervező
- Gazdasági felelős
- Programfelelős.

A kirándulás szervezőjének az a feladata, hogy a vezető tanárral állandó kapcsolatot tartson és mindenről az egész csoportot értesítse. A fegyelem betartatása.

A gazdasági felelős kezeli és összegyűjti a pénzt. Mindennemű pénzügyi kiadásért felel és a tanulmányi út befejeztével a csoport felé elszámol.

A programfelelős feladata kettős természetű:

Egyrészt az 5 napos (saját) tanulmányi úton a szabadidő program összeállítója és szervezője (pl.: mozijegy, színházjegy, stb.).

Másrészt, ha a tanulmányi utat külföldieknek szervezünk, akkor minden napra programfelelősöket jelöl ki, akik a

külföldiek ügyeiért azon a napon felelős mindenért (pl.: étkeztetésnél, üzemlátogatásnál, stb. jelen van).

- c. A tanulmány úton való részvétel, a látogatott üzemek eseményeiről jegyzőkönyv írása.

3. A tanulmányi út lebonyolítása.

Ha mindent jól előkészítettünk, akkor tulajdonképpen csak az a feladata a vezető tanárnak, hogy az útra vonatkozó fegyelmi követelményeit ismertesse és azt folyamatosan betartassa.

Részemről ezek a következők:

- a. Minden közös látogatáson a pontos és kötelező megjelenés.
- b. Az utazás során a fegyelem és tisztaság betartása. Ez különösen érvényes az autóbuszra.
- c. A külön utazás, illetve egyes rendezvényekről való elmaradás jelzése, engedélyének kérése.
- d. Az esti együttlétek megkövetelése, a szálláshely szokásainak betartása.
- e. A mértéktelen italozás és hangoskodás elkerülése.
- f. Állampolgári kötelezettségek betartása.

4. Befejező feladatok.

- a. Jelentés a tanszékvegyető, illetve a főiskola vezetősége felé a tanulmányi út teljesítéséről.
- b. A szükséges fegyelmi ügyek tisztázása és esetleges büntetése.
- c. Az elkészített jegyzőkönyvek ellenőrzése.
- d. A hallgatókkal közösen értékelni a tanulmányi utat.
- e. A hallgatókkal (ha szükséges az intézet gazdasági hivatalával is) a költségelszámolást elvégezni.
A hiányzó vagy megmaradó pénzről dönten.

III. MELLÉKLETEK

Az alábbiakban - minta céljából - egy-egy programot ismertetek.

1. Csebokszári hallgatók magyarországi programja (1982)

1. nap: Érkezés Budapestre és Egerbe szállításuk.
Étkeztetés, szállás biztosítása.
2. nap: Főigazgatói fogadás. Hallgatóknak városnézés. Strand.
3. nap: Fizikai Tanszék megtekintése. Előadások meghallgatása.
Városnézés.
4. nap: Számítástechnikai előadás, gyakorlat. Dohánygyár
megtekintése.
5. nap: Oktatástechnológiai előadás, gyakorlat. Csebokszári
városrész, valamint a VI.sz. iskola megtekintése.
6. nap: Fizikai előadás, gyakorlat. Eötvös találkozó a fizikai
tanszéken (tanári tolmácsolás egész nap).
7. nap: Szabad program. Szépasszonyvölgyi találkozás.
8. nap: Múzeum látogatása, szabad kirándulás az Egedre, orgona
hangverseny.
9. nap: Egész napos kirándulás a Mátrába. Gyöngyösi főiskola
megtekintése. (Hallgatói tolmácsolás)
10. nap: Matematikai előadás. Szabad program.
11. nap: Matematikai előadás. Tudományos Diákköri Találkozó.
12. nap: Matematikai előadás. Csillagda megtekintése. Bolyai
Diákköri Találkozó.
13. nap: Egész napos kirándulás Miskolcra. (Hallgatói
tolmácsolás).
14. nap: Szabad program.
15. nap: Szabad program.
16. nap: Fizikai előadás, gyakorlat.
17. nap: Borkombinát megtekintése. Agria Bútorgyár megtekintése.

18. nap: Egész napos kirándulás Debrecenbe. (Hallgatói tolmácsolás)
19. nap: Tanároknak fogadás a Főigazgatói Hivatalban.
Hallgatóknak szabad program. Búcsúest, kulturműsor.
20. nap: Budapestre utazás. Budapest bemutatása.
Este utazás Moszkvába.

2. Zielona Góra-i főiskolai hallgatók magyarországi program-javaslat (1987)

1. nap: Érkezés Egerbe.
2. nap: Fizikai Tanszék megtekintése. A tanszéken folyó oktató és tudományos munka ismertetése. Kisérletek bemutatása. Ismerkedés a várossal. Üzemlátogatás. (Pl.: Dohánygyár)
3. nap: Fizikai laboratóriumi gyakorlatok.
Üzemlátogatás (Pl.: Vilati).
4. nap: Gyakorló iskolai látogatás. Tanítási óra megtekintése. Egy gimnázium megtekintése. Oktatástechnológiai Csoport és Csillagda megtekintése.
5. nap: Szabad program. Magyar-Lengyel baráti összejövetel.
6. nap: Egész napos kirándulás Szilvásváradra. (Vagy múzeum látogatása, műemlékek)
7. nap: Debrecen KLTE és ATOMKI meglátogatása.
8. nap: Miskolci Egyetem és Miskolc környékének bemutatása.
9. nap: Számítástechnikai Csoport megtekintése. Programok készítése és gépi feldolgozása. Fizikai gyakorlat és előadás.
10. nap: Előkészület az utazásra és utazás.

3. Kimutatás az általam szervezett külföldi tanulmányi utakról:

- 1964. Csehszlovákia (Kassa 50 fő)
- 1968. Német Demokratikus Köztársaság (Erfurt 21 fő)

- 1973. Csehszlovákia (Bánska Bystrica-Kassa 39 fő)
- 1975. Szovjetunió (Csebokszári 18 fő)
- 1977. Német Demokratikus Köztársaság (Erfurt 20 fő)
- 1982. Szovjetunió (Csebokszári 22 fő)
- 1986. Lengyelország (Zielona Góra 9 fő)

IRODALOM

- [1] Darvas Andor-Szabó Lajos-Vidó Imre: A fizika tanításának általános iskolai módszertana.
- [2] Tanterv az általános iskola számára.
Országos Köznevelési Tanács, 1946. Budapest
- [3] E.N. Gorjacskin: A fizikatanítás módszertana I-II.kötet
Közüktatásügyi Kiadóvállalat, 1951.
- [4] Weidner János: A fizika tanítása.
Tankönyvkiadó, 1976.

VIDÓ IMRE

VISSZAPILLANTÁS SZAKMÓDSZERTANI TANULMÁNYI KIRÁNDULÁSOKRA
(Tanárképző Főiskola Eger, matematika-fizika-technika szak)

ABSTRACT: *The author of this paper has been teaching the methodology of the education of physics at the Teachers' Training College in Eger since 1952. Each academic year he was the leader of an instructional excursion. In this paper he summarizes the purpose, the tasks and the problems of organization and carrying out of these excursions.*

I.

A vérzivataros II. Világháború befejeztével eléggé kellemetlen helyzetbe került a magyar közoktatás is! Az iskolák reménytelenül siralmas, leromlott állapotban voltak. A szemléltetésre szolgáló eszközök jelentős része megsemmisült. A tanárok, tanítók - általában mint tartalékos tisztek - igen nagy hányada nem került soha vissza. (Persze, voltak olyanok is akik "kitartottak" s elmenekültek!) Azt gondolom, országunk gazdasági (és politikai!) helyzetéről főlegesen részletesebben írnom!

Ilyen sanyarú helyzetben kellett az élet minden területén - így a nagyon fontos oktatás területén is - megkísérelni a talpraállást!

II.

Művelődéspolitikánk nagyon szép, nagyon előremutató célokat tűzött ki. Meghirdette a tanuláshoz, a művelődéshez való jogot, gyakorlatilag mindenki számára. Fő célkitűzés: minden 6-14 éves korú magyar gyermek egységes tanterv szerint tanulva sajátítsa el a legalapvetőbb, legáltalánosabb, a gyakorlati életben legszükségesebb ismereteket!

A 37000/1945. ME rendelet intézkedik az általános iskolára történő áttérést. A 75000/1946. VKM. rendelet életbe lépteti az általános iskolai tantervét. (Fokozatosan megszűnik ennek értelmében a polgári iskola, valamint a gimnázium alsó 4 osztálya!)

Az elképzelések tehát megvoltak csak a megvalósítás mikéntjének megoldása ütközött nehézségekbe. Ezen nehézségek áthidalására nézve igen jelentős lépésnek tartom az "Állami Pedagógiai Főiskolá"-k létrehozását.

Ortutay Gyula vallás- és közoktatásügyi miniszter 1947. november 17-én többek között ezeket mondta: "A pedagógiai főiskolán újtipusú nevelőket kívánunk kiképezni a magyar társadalom számára."

A pedagógiai főiskolákat tulajdonképpen a régebbi polgári iskolai tanárképzők "folytatásá"-nak tekinthetjük. Így tehát nem okozott gondot a Szeged-i, a Budapest-i főiskolák létrehozása. Am megnyitotta kapuit Debrecenben és Pécsen is egy-egy pedagógiai főiskola.

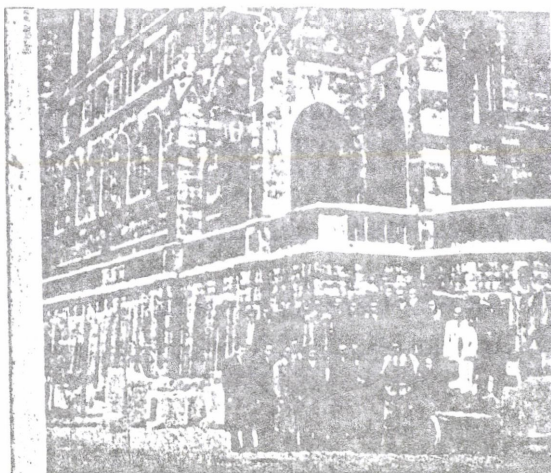
Debrecenből - a Kossuth Egyetem alagsorából - 1949. szeptemberére átkerült a főiskola 15-16 hallgatóval (mat.-fiz.-kém.!) és jónéhány kiváló tanárral (Dr. Némedi Lajos, Dr. Rapcsák András, Dr. Papp István) Egerbe. (A Lyceum épületébe) A II. évfolyam tehát már Egerben indult kb. 16-18 mat.-fiz.-kém. szakos hallgatóval. E sorok írója 1950. szeptemberében, amolyan 3. generációsként került az egri főiskolára 24-ed magával (mat.-fiz.!).

III.

Egerben a főiskolán - főleg a mat.-fiz. tanszéken - nagyon emberséges, barátságos hangulat volt.

Valószínűleg ez a kölcsönös megbecsülés, tisztelet szülte azt, hogy sokszor elbeszélgettünk - nemcsak szakmai kérdésekről is. A Miskolc-i tanítóképző kedves emlékei nem szenvedtek csorbát Egerben! (és ez nagyon jólesett!). A kis tanszéki csoport - mintegy 58-60 mat.-fiz.-kém. -es hallgató a három évfolyamon

összesen, és négy tanár (a mat.-ról Rapcsák Bandi bácsi is) - 1951. tavaszán eltervezte, hogy felutazik Budapestre. A kirándulást Darvas Andor a Fizika Tanszék vezetője, főiskolai tanár szervezte és vezette. Az utazás kissé hosszú volt, (6 óra 30 perc - gőzvontatás -), de hát szétnézni Magyarország fővárosában sokunk számára ez volt az első alkalom! Tetszett a Városliget a sok érdekes látnivalóval. Szomorúan néztük az Erzsébet-híd két pillérét



stb. Valahogyan ekkor kezdődött egy élő hagyomány! A következő években is ellátogattunk - természetesen évről évre cserélődő hallgatókkal - az Egerhez nem távol lévő Salgótarjánba, Parádra, Nagybátonyba, Aggtelekre, Ózdra, stb. Mint érdekességet említem meg, hogy volt rá példa - amíg nem volt autóbuszunk - 8-10 km-es gyalogtúra lebonyolításra került. (Egyik állomásról a másikra tanárok és hallgatók együtt!) Új Ezek a látogatások (kirándulások) - megítélésem szerint - nem nagyon lépték túl a kedves, kellemes, emberi kapcsolatok ápolását (Esetleg 1-2 gyár meglátogatása említhető - szakmai szempontból, a magyar tájakban való gyönyörködés.).

Budapest, 1951.

IV.

Ezek a nagyon kedves, hangulatos kirándulások kissé "keményebb" színezetet kaptak, amikor bevezették a hallgatók számára kötelező 2 hetes vidéki tanítási gyakorlatokat (1962/63.), a tanszéki szakmódszertanos rendszert, a kötelező 5 napos gyárlátogatásokat. Az előzőekben említett 1-2 napos kirándulásoknak tehát nehezen maradt hely! (Idő!)

Értelmes kompromisszumos alapon azonban kialakult - a mi tanszékünkön az a vélemény, hogy a III. évfolyamra kötelezően előírt 5 napos belföldi tanulmányi látogatás idejéből a szakmódszertan kapjon meg 1 napot. (Megmaradt tehát a folytonosság!)

A további évtizedek során azután egyre céltudatosabbá váltak ezek az 1 napos szakmódszertani kirándulások: a baráti elbeszélgetések mellé tanítási óralátogatásokat, valamint egy-egy gyár vagy üzem megtekintését is beiktattuk a programunkba.

A következőkben ezekről az 1 napos szakmódszertani tanulmányi látogatásokról kívánok rövid ismertetést adni.

V.

Célok, feladatok: Hallgatóink tanulmányaik végeztével zömmel tanári állásba kerülnek. Minden bizonnyal vezetnek majd a tanítványaiknak különböző kirándulásokat. (Üzemlátogatás, gyárlátogatás, múzeumlátogatás, tájrlátogatás, stb.)

Hasznosnak tartjuk tehát, ha némi betekintést nyernek a szervezési problémák mechanizmusába.

Előkészítés: - engedélyek kérése

- utazás
- étkezés
- szállás
- megfigyelési szempontok
- balesetvédelem, stb.

A kirándulás levezetése: - fegyelem
- előre nem látható problémák
megoldása, stb.

A szerzett tapasztalatok tananyagba illesztése (elmélet és
gyakorlat kapcsolata)

VI.

Tanszékünk ilyen irányú programjában hagyományosan két útvonal
nyert "polgárjogot":

- a. Eger-Sirok-Recsk-Parádsasvár-Kékestető-Gyöngyös-Eger
- b. Eger-Putnok-Sajószentpéter-Miskolc-Eger

Röviden ezek programjáról:

Előljáróban meg kell említenünk, hogy igen nagy könnyebbséget
jelentett a programok végrehajtásában, amikor Főiskolánk saját
autóbust kapott, s azzal tudtunk utazni.

Tehát az útvonalakról:

- a. - a Siroki vár megtekintése (és megmászása), a magyar
történelemmel kapcsolatos érzelmi vonatkozások,
- tanítási órák - fizika kiemelése, de matematika is -
hospitálása, a látott órák elemzése, az iskola megtekintése.
- a Parádsasvári üveggyár meglátogatása (gyártási folyamat,
stb.)
- Kékestető egy kis élmény, látványosság (hazaszeretet!)



Kékestető, 1971.

- Gyöngyösön városnézés, pihenés.
- b. - Putnokon az ált.iskolában fizika és matematika tanítási órák látogatása, óraelemzések, az iskolák megtekintése,
 - a Sajó-völgy megtekintése,
 - a Sajószentpéteri - korszerűen felszerelt, automatizált - üvegyárában gyárlátogatás,
 - Miskolc: városnézés (Avasi torony, Lillafüred, stb.).

VII.

Ugy ítéljük meg, hogy ezek az 1 napos szakmódszertani tanulmányutak igen sok szempontból hasznosak, s, remélhetőleg hozzájárulnak leendő általános iskolai tanáraink pedagógus hivatástudatának pozitív irányú alakításához, fejlesztéséhez.

Reméljük, hogy ezt a - közel négy évtizedre visszatekintő - hagyományt a jövőben is ápolni fogja tanszékünk!

IRODALOM

[1] Tanterv az általános iskola számára.

Országos Köznevelési Tanács, Budapest, 1946.

[2] 1948. évi XXXIII. törvénycikk

Köznevelés IV. 12.sz., Budapest, 1948.

PATKÓ GYÖRGY

25 ÉVES AZ OPTIKAI KUTATÁS AZ EGRI TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA FIZIKAI
TANSZÉKÉN

ABSTRACT: *This paper gives an outline of the development of the laboratories at the Department of Physics of the Teachers' Training College in Eger, and summarizes the optical research carried out at the department. Some statistical data of the Students' Research Group are also reported. The titles of the dissertations and that of the most important papers written at the department are also included in this paper.*

1948 nyarán jött létre a Debreceni Pedagógiai Főiskola, intézményünk jogelődje. A közoktatásügyi miniszter 1949-ben elrendelte a főiskola áttelepítését Egerbe.

A főiskola fennállása óta a fizikai tanszék folyamatosan működik és fejlődése lényegében három szakaszra bontható. Az első szakasz a kétéves képzés időszaka 1948-1951-ig. A második a hároméves képzés ideje 1960-ig, a harmadik szakasz a négyéves tanárképzés 1960-tól napjainkig.

A nappali és levelező tagozaton kiadott fizikaszakos oklevelek és az intenzív pedagógus továbbképzés tanusítványainak száma közel 2000.

A fizikai tanszék oktatóinak tudományos tevékenysége két területen bontakozott ki. Egyrészt a fizikatanítás speciális kérdései elméleti és gyakorlati vizsgálataival, másrészt kísérleti optikával, atom- és molekulaszpektroszkópiával foglalkoztunk.

Tanszékünk oktatói Darvas Andor vezetésével szívesen foglalkoztak optikai jelenségek demonstrálásával, fényképezésével, mérésével. Az optikai szinképek demonstrálását, az emissziós spektrumok hullámhosszának mérését egy TB-1 spektroszkóppal végeztük. Tanszékünkön jól működött egy fotoszakkör.

A tanszéki optikai kutatás kezdetének mégis 1964-et tekintjük. Dr. Mátrai Tibor kd. tanszékvezető főiskolai tanár, főiskolánk 1963/64-es évkönyvében köszönte meg a Központi Fizikai Kutatóintézet vezetésének, hogy tanszékünknek 200000 forint értékű használt műszert adományozott leltári könyvjóváírással. Ekkor kaptunk egy ISZP-22-es kvarcspektrográfot, egy szinképvetítőt és egy MF-2-es mikrofotométert. Ezzel az optikai műszerparkkal 200 nm-től - 1 μ m hullámhossztartományig terjedő közép- és nagybontású spektroszkópiai laboratóriumot telepítettünk tanszékünkre. Üzembe helyeztünk egy Pfund-féle vasív és egy HFO-1 szikragerjesztésű fényforrást.

Mátrai Tibor irányításával interferencia-spektroszkópiai feladatok megoldásával, hidrogén és az alkáli fémek atomspektrumával, az alkáli-hidridek molekulaszpektrumával foglalkoztunk. Az interferencia-spektroszkópiai feladatok megoldását Márkus Jenő vállalta, aki a tanszékünkön kifejlesztett Michelson interferométer témakörében 1969-ben a József Attila Tudományegyetem kísérleti fizikai intézetében doktorált. [1]

Az interferométert elsősorban demonstrációkhoz, tudományos diákköri feladatok megoldásához használtuk fel. Nagy mennyiségű spektrogram kiértékelését végeztük el nem lineáris interpolációs módszerrel. Egyetemi és főiskolai szakdolgozatok készültek a hidrogén Rydberg-állandójának meghatározására. A nátrium-hidrid spektrumának vizsgálatából sikeresen doktorált Patkó György 1972-ben Szegedet. [2]

Optikai mérőműhelyüket a Műszaki Fizikai Kutatóintézettől, a BME Atomfizika tanszékétől, az ELTE és a KLTE analitikai-kémiai

intézeteitől átvett optikai eszközökkel fejlesztettük tovább. Az emissziós spektroszkópiai mérőhely 1984-ben műszerpályázaton elnyert Zeiss-gyártmányú PGS-2 síkrácsos spektrográf beszerzésével minőségi fejlesztésen ment át. A spektrográf 200 nm-től 2,8 mikrométer hullámhossztartományban használható és 5. rendben a felbontóképessége 225000. Lehetőségünk nyílt a lineáris interpolációval atom- és molekulaszpektroszkópiai tudományos igényeket kielégítő feladatok megoldására. Vizsgáljuk a hidrogén és a deutérium optikai spektrumát. Széles körű kísérleti fényforrás és fényáram vizsgálatokba kezdtünk úgy, hogy kísérleti eredményeinket a Fresnel-formulák számítógépes megoldásával vetettük egybe. A különböző fényáramok spektrális eloszlásán, polarizációján kívül eredményesen vizsgáltuk a transzmissziós és reflexiós jelenségeket is.

Az ív, szikra, láng, rádiófrekvenciás gerjesztések mellett különböző lézeres gerjesztésű spektroszkópiai vizsgálatokat is végeztünk. Lézereink: LMA-10 (teljesítménye 2 MW), M-Q-003 minifoszfát lézer (teljesítménye 1 MW). Márkus Jenő nyugállományba vonulása után az interferenciás-spektroszkópiai mérőhely továbbfejlesztését Kiss László vállalta.

A KFKI-től kapott 1T indukciójú elektromágnes tanszékünkön üzembehelyeztük és az ISZP-51 üvegspektrográfot Lummer-lemezzel és Fábry-Perot interferométerrel keresztezve megoldottuk a normális és anomális Zeeman-jelenség demonstrálását és mérését. Sikeresen reprodukáltunk elektro- és magnetooptikai jelenségeket. E téma művelésébe Vida József is bekapcsolódott és 1985-ben az ELTE-n a Lummer-lemez felbontóképességének kísérleti vizsgálatából doktorált. [3]

Vida József 1982-ben tanszékünkön üzembehelyezett a Borsodi Vegyi Kombináttól átvett jól működő UR-10 infraspektrométer és a műszer üzembehelyezésétől kezdve abszorpciós optikai spektroszkópiai mérésekkel is foglalkozik.

Különböző anyagok optikai transzmissziójának vizsgálata mellett kétatomos molekulák rotációs állandóinak meghatározását is végezzük. Működik a mérőhelyen egy IKSZ-14-es infraszpektrométer és egy SPEKTROMOM-195 is.

Tanszékünkön Budó Ágostonról és Mátrai Tiborról elnevezett optikával foglalkozó diákkörünk 25. éve működik. A diákkör tagjai elsajátították az optikai kutatás elméletét és kísérleti alapjait, bekapcsolódtak a kutatóhely fejlesztésébe és támogatták az oktatók tudományos tevékenységét. A diákkör tagjai gyakorlati spektroszkópiával és lézerek alkalmazásaival foglalkoznak. Hallgatóink tanszékünkön több mint 100 optikai témájú szakdolgozatot irtak. A következő táblázat tartalmazza a diákkör működési évét, a diáktitkár nevét, évfolyamát, szakpárosítását, a diákkör létszámát és az adott tanévben elhangzott előadások számát.

Sorsz.	Év	Diáktitkár	Év, szak	Létsz.	Ea. száma
1.	64/65	Hábel Gyula	IV. mat.-fiz.-műsz.	12	14
2.	65/66	Tóth Béla	III. mat.-fiz.-műsz.	19	12
3.	66/67	Tóth Emőke	III. mat.-fizika	20	10
4.	67/68	Szekrényes Géza	III. mat.-fizika	17	17
5.	68/69	Ottinger Vilmos	III. mat.-fizika	20	12
6.	69/70	Varga Katalin	III. mat.-fizika	12	8
7.	70/71	Sóvári Olga	III. mat.-fizika	12	10
8.	71/72	Láng Margit	III. mat.-fizika	14	8
9.	72/73	Dancs György	I. mat.-fizika	10	10
10.	73/74	Dancs György	II. mat.-fizika	11	10
11.	74/75	Kiss Gézané	III. mat.-fizika	14	9
12.	75/76	Tóth István	III. mat.-fizika	12	10
13.	76/77	Lantos Éva	III. mat.-fizika	11	9
14.	77/78	Pluzsik Szilvia	IV. mat.-fizika	10	7
15.	78/79	Bodnár Éva	III. mat.-fizika	6	8

16.	79/80	Gerecsei Zsuzsa	III. mat.-fizika	9	7
17.	80/81	Gerecsei Zsuzsa	IV. mat.-fizika	8	8
18.	81/82	Misz József	III. fiz.-techn.	11	10
19.	82/83	Misz József	IV. fiz.-techn.	9	6
20.	83/84	Tóth Lajosné	IV. mat.-fizika	9	7
21.	84/85	Liktorné Tóth Csilla	IV. mat.-fizika	7	5
22.	85/86	Frey Anna	III. mat.-fizika	8	12
23.	86/87	Frey Anna	IV. mat.-fizika	9	5
24.	87/88	Szabó Zsuzsanna	IV. mat.-fizika	10	25
25.	88/89	Fábián Gusztáv	IV. fiz.-techn.	9	12

A diákkört Patkó György szervezi és vezeti.

1986-ban tanszékünkön megindult az intenzív pedagógus továbbképzés. Ez az új továbbképzési forma lehetőséget ad arra, hogy a 120 órás továbbképzésből 20 órát a kísérleti optika tanulmányozására fordítsunk. (Elmélet, feladatok tanulmányozása 6 óra, optikai mérések 12 óra.)

Az emissziós, az interferencia-spektroszkópiái, és az abszorpciós optikai mérőhelyeinken az üzemszerű feladatok megoldására kutatócsoportokat szerveztünk. Az alábbiakban a kutatócsoport munkáját, a felvételek számával illusztráljuk:

Mérőhely	f e l v é t e l e k s z á m a				összesen
	1986.	1987.	1988.	1989.	
1. Abszorpciós	14	19	72	2	107
2. Emissziós	62	156	174	194	586
3. Interferencia- spektroszkópiái	18	27	39	9	93
Összesen:	94 +	202 +	285 +	205 =	786

Évente 7-10 tudományos optikai témájú szemináriumot szervezünk, ahol témafigyelésünkről, kutatási eredményeinkről számolunk be. Oktatóink mellett a diákkör tagjai és hazai és külföldi előadók is szerepeltek. Szemináriumainkat 4-20 fő látogatja.

Optikai demonstrációink során különböző lézereket is alkalmazunk. Tizedik éve vezetünk "kísérleti optika" és "lézerek" címmel speciál kollégiumot.

Az 1989/90. tanévtől I. évfolyamunkon két féléven át megismertetjük hallgatóinkat optikai kutatási területeinkkel, alkalmazott eszközeinkkel. Reméljük az elkövetkező években néhány tehetséges hallgatónk sikeresen kapcsolódik be a tanszékünkön folyó kutatómunkába.

1985-ben először, 1988-ban másodszor szerveztük meg az ELFT Atom- és Molekulafizikai és Kvantumelektronikai szakcsoporttal, az ELFT Heves megyi Csoportjával közösen a "Lézerek demonstrációja - - demonstrációk lézerekkel" című szimpóziumot.

Mintegy félszáz résztvevő kísérte figyelemmel a 10-20 színvonalas szakmai előadást.

Előadásaink, publikációink munkánkat, lehetőségeinket tükrözik. Több mint félszáz optikai témájú cikket publikáltunk.

Kutatóhelyünk, műszerállományunk elégséges speciális, színvonalas optikai feladatok megoldásához, de a még színvonalasabb szakmai tevékenységhegy jelentősen megemelt működési költség, és munkabér biztosítása szükséges.

További töretlen fejlődésben reménykednek tanszékünk dolgozói és kutatni vágyó hallgatói.

FONTOSABB PUBLIKACIÓINK JEGYZÉKE

- [1] Márkus Jenő: Adalékok a Michelson-féle interferométer működéséhez és felhasználásához.
Egyetemi doktori dolgozat, Eger, 1966.
- [2] Patkó György: A nátrium-hidrid emissziós spektrumának vizsgálata.
Egyetemi doktori dolgozat, Eger, 1970.
- [3] Mátrai Tibor - Patkó György: Fénytan.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
Tanárképző Főiskolák (egységes jegyzet)
- [4] Budó Ágoston - Mátrai Tibor: Kísérleti fizika III.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [5] Kiss László-Patkó György-Vida József: Eljárás interferencia-
-spektroszkópiái bontóelemek praktikus felbontó-
képességének kísérleti meghatározására.
Tudományos Közlemények XVI.kötet, Eger, 1982.
- [6] Kiss László-Patkó György: Az elektron fajlagos töltésének meghatározása magnetooptikai effektusokkal
(normális Zeeman- és Faraday-effektus).
Slovenske. Ped. Nakl. Bratislava, 1982.
- [7] Vida József: Lummer-lemez optikai felbontóképességének kísérleti meghatározása.
Egyetemi doktori dolgozat, Eger, 1984.

T A R T A L O M J E G Y Z É K

Franczia Tamás: An analytical method for calculating multicentre integrals built up from GTF-S II.	3.
Anatol Nowicki: Composite spacetime from twistors and its extensions	9.
Vida József-Kulcsár János: A spektrális felbontóképesség (II.)	23.
Patkó György-Vidó Imre: Az égbolt szórt fénye polarizációjának kísérleti vizsgálata	37.
Franczia Tamás: A kvantummechanikai impulzus eltolási szimmetriával történő bevezetéséről IV.	45.
Kiss László: A Boltzmann-féle állandó meghatározása a Stefan-Boltzmann törvény segítségével	55.
Kovács Lászlóné: Mesterséges égitestek mozgásának néhány kérdése	59.
Bálint József: Fizikai jelenségek rendszerezése a minimál-elv alapján	67.
Vida József: Modellek a molekulafizikában	77.
Hidasi Károly: Kötelező tanulmányi utak szervezése főiskolai hallgatók számára	89.
Vidó Imre: Visszapillantás szak módszertani tanulmányi kirándulásokra	99.
Patkó György: 25 éves az optikai kutatás az egri Tanárképző Főiskola Fizikai Tanszékén	105.

